



# Une expérience sur la turbulence MHD quasi-bidimensionnelle

Karim Messadek

## ► To cite this version:

Karim Messadek. Une expérience sur la turbulence MHD quasi-bidimensionnelle. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 2001. Français. NNT: . tel-01331653

**HAL Id: tel-01331653**

**<https://hal.science/tel-01331653>**

Submitted on 14 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Génie des Procédés

préparée au laboratoire EPM-MADYLAM

dans le cadre de l'Ecole Doctorale Génie des Procédés et Matériaux

présentée et soutenue publiquement

par

Karim MESSADEK

le 17 janvier 2001

Une expérience sur la turbulence MHD  
quasi-bidimensionnelle

---

Directeur de thèse : R. MOREAU

---

Jury

M. M. LEBOUCHE

Président

M. P. CARDIN

Rapporteur

M. Y. GAGNE

Rapporteur

M. P. TABELING

Rapporteur

M. R. MOREAU

Directeur de thèse

M. J. SOMMERIA

Examineur





A la mémoire de M. Benali H.

A mes Parents à qui je dois tout



## Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur René MOREAU, professeur à l'INPG, qui m'a fait confiance tout au long de ces trois années. Ses conseils et sa vision de la physique m'ont beaucoup aidé.

Je remercie Robert Bolcato, ingénieur d'études au CNRS pour sa générosité et sa contribution certaine dans les expériences que j'ai eues à mener.

Je ne saurais oublier Vladimir Uspenski, chercheur à l'université de Moscou, qui m'a initié au tout début de ma thèse à l'art des mesures dans les métaux liquides.

Enfin je tiens à remercier vivement tous ceux qui m'ont aidé à accomplir mon travail de thèse et qui ont fait que cette expérience a été très enrichissante.



# Introduction générale

Dans de nombreuses situations industrielles, des procédés électromagnétiques sont utilisés afin de manipuler des fluides conducteurs d'électricité : les techniques de brasage ou de contrôle d'écoulements de métaux en fusion à l'aide de champs magnétiques sont maintenant largement utilisées dans l'industrie métallurgique. Ces techniques ont pour but d'améliorer les caractéristiques mécaniques des produits semi-finis en contrôlant principalement les transferts de masse et de chaleur avant la solidification.

Le confinement de tores de plasma à l'aide de champs magnétiques intenses, beaucoup plus stable que le confinement inertiel, est l'un des ingrédients essentiels des futurs réacteurs de fusion thermonucléaire. Ces réacteurs nécessitent une couverture lithiée pour produire le tritium, combustible de la réaction de fusion (Deutérium/tritium). Par ailleurs, la nécessité d'extraire la chaleur fournie par le plasma, pose le problème du choix d'un fluide caloporteur. L'utilisation d'un eutectique lithium-plomb par exemple, permet à la fois d'assurer l'évacuation de la chaleur et la production du tritium. Cependant, les débits de fonctionnement liés à ce choix posent un problème de MHD considérable, puisque l'intensité des champs magnétiques au niveau des couvertures interne et externe peut atteindre une dizaine de Tesla. Les forces électromagnétiques résultantes, génèrent alors des gradients de pression très importants (perte de charge

électromagnétique) qu'il convient de réduire ; elles peuvent dans certains cas s'opposer au développement de la turbulence et réduire ainsi d'une manière importante les échanges de chaleur.

Les phénomènes MHD ne sont pas uniquement observables à l'échelle de l'homme mais à une échelle beaucoup plus grande. L'auto-entretien du champ magnétique terrestre en est un exemple. La présence de ce champ (ainsi que celui de certaines étoiles) est expliquée à l'heure actuelle comme étant le résultat d'un couplage fort entre le champ de vitesse de la fraction liquide qui constitue le noyau terrestre et les courants induits par l'écoulement lui même (effet dynamo). Il est même probable que la présence d'un champ magnétique relevée dans un corps cosmique soit la preuve de sa composition fluide (au moins en partie), ainsi que de l'existence d'une zone convective (Moffatt, 1978).

A l'échelle des installations industrielles (ou à l'échelle du laboratoire), ce couplage entre le champ de vitesse et l'induction magnétique ne peut pas être observé, car les dimensions et les vitesses caractéristiques mises en jeu sont relativement petites. L'importance de ce couplage est caractérisé par un paramètre défini dans le chapitre suivant appelé nombre de Reynolds magnétique ( $R_m$ ). Si ce nombre est très petit devant l'unité, le champ magnétique n'est pas perturbé par l'écoulement. Dans le cas contraire, le champ de vitesse et le champ magnétique sont fortement couplés. Deux grandes classes de problèmes sont alors définies : la MHD à grands  $R_m$  et la MHD à petits  $R_m$ . C'est dans ce dernier contexte que se situent les expériences que nous avons menées.

Ces expériences, dans lesquelles un écoulement cisailé turbulent MHD est forcé de façon quasi-permanente, ont été réalisées avec des champs magnétiques pouvant atteindre 6 Tesla. Sous certaines conditions, que nous énoncerons dans le chapitre suivant, la turbulence générée par l'instabilité de la couche cisailée persiste et devient nécessairement quasi-bidimensionnelle (quasi-2D). Nous avons donc l'opportunité d'étudier, à l'échelle du laboratoire, un écoulement dont la cinématique est celle d'un écoulement non MHD satisfaisant les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. Des écoulements de ce type peuvent être observés dans la nature à une plus grande échelle tels que les écoulements atmosphériques à grandes échelles rendus quasi-2D,

grâce aux effets conjugués de la faible épaisseur, de la stratification en densité et de la force de Coriolis.

L'instrumentation précise de la cellule d'expérimentation a permis de fournir une quantité importante d'informations concernant cet écoulement MHD turbulent sur une large gamme de champ magnétique jusque-là jamais explorée. Rappelons que la turbulence joue un rôle très important dans les phénomènes de transferts de masse et de chaleur, phénomènes de base présents dans pratiquement toutes les applications industrielles où des fluides sont utilisés, y compris celles faisant intervenir la MHD.

Les résultats d'investigation du champ de vitesse, qui constituent la plus grande partie de ce travail, seront exposés dans les chapitres 4 et 5 de ce mémoire. Après une introduction à la turbulence MHD à petits  $R_m$ , l'expérience MATUR (MAGnetohydrodynamic TURbulence) ainsi que son instrumentation seront présentées au chapitre 3. L'écoulement moyen (chapitre 4) et les propriétés de la turbulence (chapitre 5), seront étudiés sur une large gamme de paramètres ( $Ha$  et  $Re$ ). Enfin, quelques commentaires sur les mesures de température seront faits au chapitre 5 avant de conclure.





# Chapitre 1

## 1 La turbulence quasi-bidimensionnelle des écoulements MHD

### 1.1 Introduction

De nombreuses études, motivées entre autre par la compréhension des écoulements atmosphériques à grandes échelles et des propriétés de transport associées, ont permis de décrire les propriétés de la turbulence 2D. Dans certaines circonstances, la turbulence est maintenue bidimensionnelle avec une plus ou moins bonne approximation par une force extérieure stabilisante (effets conjugués de la faible épaisseur, de la stratification de densité et de la force de Coriolis dans le cas des écoulements atmosphériques à grandes échelles) ou par des conditions aux limites. A l'échelle du laboratoire, des écoulements 2D peuvent être obtenus dans des films d'hélium superfluide (Kraichnan & Montgomery, 1980), dans des films minces d'eau savonneuse (Couder, 1984), dans des écoulements en rotation rapide (Colin de Verdière, 1980), en fluides stratifiés en densité ou dans un fluide conducteur d'électricité en présence d'un champ magnétique

uniforme.

### 1.1.1 Travaux expérimentaux antérieurs

Les premières expériences ont été réalisées dans des conduites où s'écoulait du mercure en présence d'un champ magnétique transverse. Il est apparu que pour des champs suffisamment forts, les pertes de charges mesurées devenaient égales à celles calculées théoriquement dans le cas d'un écoulement MHD laminaire (Hartmann & Lazarus 1937, Bocheniski *et al.*, 1971). L'idée d'une re-laminarisation de l'écoulement sous l'action stabilisante du champ était alors émise. Cependant, les premières mesures locales de vitesse (Branover *et al.*, 1965, Kolesnikov, 1974, Hua & Lykoudis, 1974) ont révélé la présence d'un taux de turbulence assez élevé, du même ordre que celui observé sans champ magnétique et avec une énergie principalement concentrée dans les grandes échelles. Plusieurs caractéristiques d'une turbulence bidimensionnelle ont été observées : la composante de la vitesse parallèle à  $B$  est petite devant la composante transversale, une bonne corrélation du champ de vitesse dans la direction du champ et des spectres d'énergie en  $k^{-3}$  sont mesurés (Sukoriansky, 1987). Des mesures de dispersion de contaminants passifs, température (Sommeria, 1983) ou polluants chimique (Kolesnikov & Tsinober, 1974), montrent que les transferts sont presque supprimés dans la direction du champ magnétique.

Par ailleurs, les observations effectuées dans un cylindre vertical de mercure (2.2 m de haut) avec un champ magnétique axial (Alemany *et al.*, 1979) ont montré que les trois composantes de vitesse sont du même ordre de grandeur. L'échelle perpendiculaire au champ ne varie pas alors que celle parallèle au champ croît indéfiniment. Enfin des spectres en  $k^{-3}$  ont aussi été observé ainsi qu'une décroissance rapide de l'énergie cinétique (en  $t^{-1.7}$  au lieu de  $t^{-1.2}$  sans champ).

### 1.1.2 Rappel sur la turbulence MHD à petits $R_m$

Nous nous limiterons au cas où le Reynolds magnétique est très petit devant l'unité ( $R_m = \mu_0 \sigma UL \ll 1$ ). Ce nombre qui mesure l'importance relative du terme de convection par rapport au terme de diffusion du champ est analogue au nombre de Reynolds en mécanique des fluides classique ; L'équation de l'induction étant une

équation aux dérivées partielles de même nature que l'équation de la vorticité. A l'échelle du laboratoire, le Reynolds magnétique reste très petit devant l'unité et le champ total  $B = B_0 + b$  peut être approximé par le champ  $B_0$  appliqué à l'écoulement ( $b$  étant la perturbation du champ due aux courants induits  $\sim R_m B_0$ ). Dans ce cas, le système d'équation qui gouverne le problème MHD se résume à :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{\rho} \quad \text{q.d.m.,} \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad \text{loi d'Ohm,} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{conservation.} \quad (3)$$

A partir des équations (1) et (2) on peut déduire un temps caractéristique des effets électromagnétiques  $\tau_J = \rho/\sigma B^2$ , qui correspond à un champ de vitesse initial donné. L'importance relative de ces effets par rapport aux effets inertiels (temps caractéristique  $\simeq l_\perp/u_\perp$ ) et visqueux (temps caractéristique  $\simeq h^2/\nu$ ) est caractérisé par le paramètre d'interaction  $N = \sigma l_\perp B^2/\rho u_\perp$  dans le premier cas, et par le nombre de Hartmann  $Ha = (\sigma B^2 h^2/\rho \nu)^{1/2}$  dans le deuxième. Dans les situations où les effets électromagnétiques sont dominants, c'est à dire pour  $N \gg 1$  et  $Ha \gg 1$ , l'inertie peut être négligée et les effets visqueux demeurent important uniquement dans des couches limites qui se développent le long des parois parallèles et perpendiculaires au champ. Si ces dernières sont parfaitement conductrices, les différences de potentiel électriques créées dans le fluide, produisent des courants électriques intenses qui se referment dans ces parois et amortissent l'écoulement en un temps de l'ordre de  $\rho/\sigma B^2$  (temps Joule). Si en revanche ces parois sont isolantes, les courants induits ne peuvent se refermer que dans des couches de faible épaisseur  $\delta_{Ha} = h/Ha$  apell es couches de Hartmann. Le freinage de l'écoulement se fait alors en un temps beaucoup plus long appelé temps de freinage Hartmann est donné par :  $\tau_H = \rho h^2/\sigma \nu B^2$  (Sommeria & Moreau, 1982).

### 1.1.3 Tendence à la bidimensionalisation de l'écoulement

**Mécanisme** Le mécanisme d'élongation des structures turbulentes dans la direction du champ magnétique peut être expliqué par la dégénérescence des ondes d'Alfvén en diffusion du champ de vitesse dans la direction de  $B$  quand le nombre de Reynolds magnétique est petit devant l'unité. L'équation du mouvement,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mathbf{B}_0}{\mu \rho} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_{\parallel}} \quad (4)$$

et l'équation de l'induction

$$\mathbf{B}_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_{\parallel}} + \frac{1}{\mu \rho} \Delta \mathbf{b} = 0, \quad (5)$$

impliquent que pour des valeurs assez grandes du champ  $B_0$ , la dérivée partielle de toute quantité dans la direction du champ doit être faible, de sorte à ce que le produit  $B_0 \times \frac{\partial}{\partial x_{\parallel}}$  reste du même ordre de grandeur que les autres termes. Le champ modifié  $\mathbf{b}$ , déduit de l'équation (5) puis injecté dans l'équation (4) permet d'écrire :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \Delta^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_{\parallel}^2}. \quad (6)$$

Cette relation montre que la force de Laplace diffuse le champ de vitesse dans la direction du champ, et que cette diffusion peut être caractérisée par une diffusivité magnétique que l'on note  $D_m$  et qui vaut :

$$D_m = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho} \Delta^{-1} \approx \frac{\sigma B_0^2 l_{\perp}^2}{\rho}. \quad (7)$$

Cette diffusion magnétique établit donc une bonne corrélation du champ de vitesse entre deux plan transverses, à condition que la distance  $d$  entre ces plans soit telle que :

$$d < l_{\perp} \left( \frac{\sigma B_0^2 l_{\perp}}{\rho u_{\perp}} \right)^{1/2} = l_{\perp} N^{1/2}. \quad (8)$$

Ceci implique que l'élancement  $l_{\parallel}/l_{\perp}$  d'une structure turbulente doit être de l'ordre de  $N^{1/2}$ . Ce résultat a été confirmé dans les expériences d'Alemanly *et al.* (1979).

Une étude théorique de cette turbulence homogène quasi-2D a aussi été proposée en utilisant une méthode de fermeture à deux points E.D.Q.N.M. et une phénoménologie de type Kolomogorov basée sur l'examen de la transformée de Fourier de la force de Laplace (Alemany *et al.*, 1979) :

$$\hat{\mathbf{F}} = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{k_z^2}{k^2} \hat{\mathbf{u}}, \quad (9)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}$  est la transformée de Fourier de la vitesse. On voit ainsi que cette force est indépendante de l'échelle considérée mais dépend de l'angle formé par le vecteur champ magnétique et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . La dissipation d'énergie par effet Joule est donc maximum pour les vecteurs d'onde alignés avec le champ. Les auteurs ont divisé l'espace de Fourier en deux zones : une zone de vecteurs d'onde de direction proche de la perpendiculaire au champ magnétique où la dissipation par effet Joule est faible, et où est concentré l'essentiel de l'énergie cinétique, puis une deuxième zone, complémentaire, où se produit la dissipation par effet Joule et où l'énergie cinétique à un instant donné est faible (cône de dissipation, Alemany *et al.*, 1979).

La dissipation Joule, responsable de l'anisotropie de l'écoulement, et les transferts angulaires d'énergie cinétique qui tendent à restorer une certaine isotropie, sont les mécanismes clés de cette turbulence homogène quasi-2D. En effet, pour une anisotropie forte, la dissipation par effet Joule devient moins efficace et l'énergie est transférée depuis les zones peu influencées par le champ vers le cône de dissipation afin d'y compenser l'énergie perdue par effet Joule.

Plus récemment, ce mécanisme d'élongation des structures turbulentes sous l'action d'un champ constant a été expliqué par Davidson (1997) comme étant la conséquence de l'invariance de la composante parallèle au champ du moment cinétique.

**Conséquences** L'une des principales conséquences de l'équilibre de ces deux mécanismes est l'existence d'un spectre d'énergie en  $k^{-3}$  décroissant au cours du temps en  $t^{-2}$  ( $E(k) \sim t^{-2}k^{-3}$ ) qui a été vérifié expérimentalement par Alemany *et al.*, (1979). En effet l'équilibre entre dissipation Joule et effets inertiels implique l'égalité de leur temps

caractéristiques,  $\tau_J = \rho/\sigma B^2$  indépendant de  $k$ , et  $\tau_{tu} = 1/(k^3 E(k))^{1/2}$  et conduit à un spectre en  $k^{-3}$ . Notons que ce spectre en  $t^{-2}k^{-3}$  que l'on retrouve par ailleurs en turbulence 2D et qui est associé à la cascade directe d'ensrophie (prédit par Batchelor, 1969), correspond, dans les expériences d'Aleman, à une situation où l'écoulement n'est pas 2D mais rendu anisotrope par un mécanisme de dissipation d'énergie.

#### 1.1.4 Influence des parois de Hartmann

La différence fondamentale qui existe entre la turbulence des écoulements MHD en conduite (Branover, Kolesnikov, Lykoudis, Tsinober et d'autres) et la turbulence MHD homogène décrite par Aleman *et al.* (1979) réside dans l'influence que les couches de Hartmann ont sur l'écoulement. Dans l'expérience d'Aleman, ces couches sont bien sûr présentes mais trop éloignées pour interagir avec l'écoulement. On définit alors une distance  $h$  telle que  $h < l_\perp(\sigma B_0^2 l_\perp / \rho u_\perp)^{1/2}$  (éq. 8), sur laquelle les couches de Hartmann ne peuvent être ignorées. L'influence de ces couches sur l'écoulement peut être divisée en trois parties :

- Premièrement, chaque structure tourillonnaire, qui ne peut être bidimensionnelle dans la couche de Hartmann, est le siège d'un pompage d'Ekman qui, par continuité, injecte du fluide de la couche vers l'écoulement de cœur ; dans ces couches les dérivées perpendiculaires au champs ( $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ ) sont  $Ha$  fois plus faibles que la dérivée normale à la paroi ( $\partial/\partial z$ ). La composante radiale de la vitesse due à la force centrifuge dans la couche est de l'ordre de  $u_\perp/N$  et par continuité, la vitesse d'injection de fluide dans le cœur,  $u_\parallel$  doit être de l'ordre de  $u_\perp/NHa \ll 1$ .
- Deuxièmement, il s'agit d'une conséquence de la condition de nullité du flux de la densité de courant à la paroi quand cette dernière n'est pas conductrice d'électricité. La conservation du courant dans la couche de Hartmann permet en effet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = B \omega_z(z) = B \omega_z(0) (1 - \exp(-Ha z)), \quad (10)$$

où  $\phi$  est le potentiel électrique et  $\omega_z$  la composante de la vortacité parallèle au champ magnétique. L'intégration selon  $z$  de l'équation (10) et la condition à la paroi  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$  conduisent à la relation :

$$j_z = (\rho\nu/\sigma)^{1/2}\omega_z^0, \quad (11)$$

dans laquelle  $\omega_z^0$  est la composante parallèle à  $B$  de la vorticité de cœur près des couches de Hartmann. On peut également relier le courant à la vorticité en prenant deux fois le rotationnel de la loi d'Ohm :

$$\Delta \mathbf{j} = \sigma B \frac{\partial \omega}{\partial z}. \quad (12)$$

Des équations (11) et (12) on obtient finalement la relation :

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{l_\perp}{Ha} \Delta_\perp \omega^0. \quad (13)$$

Cette relation montre que la dérivée selon la direction du champ est nécessairement  $Ha$  fois plus faible que les dérivées perpendiculaires au champ. Ce résultat fondamental qui découle de la condition de flux électrique nul à la paroi, implique que près des couches de Hartmann, toute structure turbulente doit être perpendiculaire à ces couches (Sommeria & Moreau, 1982). Seuls certains modes de déformation de ces structures sont donc possibles. Les nombres d'ondes excités ne pourront être que de la forme  $k_\parallel = n\pi/h$  et l'énergie contenue dans ces nombres d'ondes sera donc quantifiée. Ce résultat conduit au critère de bidimensionalité suivant :

Seules les échelles définies par  $k_\perp < \pi N^{1/2}/h$  à l'extérieur de la couche de Hartmann, ont une cinématique bidimensionnelle.

- Troisièmement, la force de Laplace définie dans l'équation (1) peut être, dans le cas où le critère de bidimensionalité est vérifié, remplacée par un terme de frottement linéaire. Sommeria & Moreau (1982) montrent qu'à partir de la conservation de la densité de courant :

$$\nabla_\perp \cdot \int_0^h \mathbf{j}_z dz = 0, \quad (14)$$

l'équation du mouvement dans le cœur peut s'écrire :



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_\perp = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u}_\perp + -2\frac{\mathbf{u}_\perp}{\tau_H}. \quad (15)$$

Le terme de frottement linéaire  $-2\mathbf{u}_\perp/\tau_H$ , tient compte des contraintes visqueuses dans les couches de Hartmann qui sont transférées dans le cœur grâce aux courants électriques. Notons que si le temps de freinage  $\tau_H$  est grand par rapport au temps de retournement des tourbillons  $\tau_{tu}$ , l'écoulement de cœur quasi-bidimensionnel est peu influencé par le frottement et sa dynamique obéit alors aux équations de Navier-Stokes bidimensionnelles classiques.

**Conclusion** Dans le cas d'un écoulement MHD confiné entre des parois transversales isolantes, la turbulence est gouvernée par trois mécanismes :

- Formation de structures quasi-2D alignées avec le champ magnétique dont le temps caractéristique est  $\tau_{2D} = \rho h^2 / \sigma B^2 l_\perp^2$ .
- Transferts d'énergie entre modes perpendiculaires au champ caractérisés par le temps  $\tau_{tu} = l_\perp / u_\perp$ .
- Dissipation d'énergie cinétique par effet Joule et par viscosité dans les couches de Hartmann caractérisée par le temps  $\tau_H$ .

### 1.1.5 Réalisation d'un écoulement bidimensionnel

Les conditions définies précédemment sont réalisées expérimentalement en utilisant une couche de mercure horizontale de faible épaisseur  $h = 0.01$  m , placée dans un champ magnétique vertical et uniforme. Le fluide est contenu dans une cuve dont les parois transverses au champ sont électriquement isolantes.

Le tableau ci-dessous compare les temps caractéristiques des principaux mécanismes mis en jeu pour deux valeurs du champ magnétique ( $B = 0.5$  et  $5$  Tesla). Dans cette comparaison, les vitesses et les échelles transversales caractéristiques considérées sont respectivement de l'ordre de  $0.1$  m/s et  $0.1$  m.

	$B = 0.5 \text{ T } (Ha = 150)$	$B = 5 \text{ T } (Ha = 1500)$
$\tau_J = \frac{\rho}{\sigma B^2} \text{ (s)}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
$\tau_{2D} = \frac{\rho}{\sigma B^2} \frac{h^2}{l_\perp^2} \text{ (s)}$	$10^{-1}$	$10^{-3}$
$\tau_{tu} = \frac{l_\perp}{U} \text{ (s)}$	1	1
$\tau_H = \frac{h}{B} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma \nu}} \text{ (s)}$	10	1
$\tau_\nu = \frac{l_\perp^2}{\nu} \text{ (s)}$	$10^3$	$10^3$

Il apparaît clairement que pour des faibles champs magnétiques ( $\sim 0.5 \text{ T}$ ), les petites échelles de l'écoulement, typiquement de l'ordre de  $0.01 \text{ m}$ , ne peuvent pas être quasi-2D car leur temps de retournement est du même ordre que le temps de bidimensionalisation ( $\tau_{tu} \sim \tau_{2D} \simeq 0.1 \text{ s}$ ). Pour des champs plus importants ( $\sim 5 \text{ T}$ ), pratiquement toutes les échelles de la turbulence peuvent être supposées quasi-2D. La cinématique de cet écoulement est alors celle d'un écoulement 2D classique (non MHD). En revanche, sa dynamique est très différente car dans ce cas, la dissipation par effet Joule, qui représente l'originalité des écoulements MHD en conduite, est du même ordre que les transferts inertiels ( $\tau_H \sim \tau_{tu} \simeq 1 \text{ s}$ ), et on peut s'attendre à ce que les propriétés de l'écoulement qu'on étudie résultent de l'équilibre entre ces deux mécanismes.

### 1.1.6 Création de l'écoulement

Pour des nombres de Hartmann très grands devant l'unité, les dérivées perpendiculaires au champs ( $\partial/\partial x, \partial/\partial y \sim Ha^{-1} \partial/\partial z$ ) peuvent être négligées dans la couche de Hartmann, au même titre que les forces d'inertie (§ 1.1.4). Cette simplification permet d'écrire :

$$\frac{1}{\rho}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = -\nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}, \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{j} = \sigma \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (17)$$

Soient  $\mathbf{j}^0$  et  $\mathbf{u}^0$  le courant et la vitesse dans le cœur de l'écoulement. Le profil de vitesse dans la couche de Hartmann se raccorde en :

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u}_\perp^0 (1 - \exp(-(\sigma/\rho\nu)^{1/2} B z)), \quad (18)$$

Le gradient vertical de la vitesse dans cette couche donne lieu à une production de courant orthogonal au champ  $\mathbf{j}_\perp$  tel que :

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j}_\perp^0 + \sigma B \exp(-(\sigma/\rho\nu)^{1/2} B z) \mathbf{u}^0 \times \mathbf{n}, \quad (19)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à la paroi de Hartmann. Cette relation permet de relier la vitesse de cœur à la densité totale de courant électrique  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty \mathbf{j}_\perp dz = (\sigma/\rho\nu)^{1/2} \mathbf{u}^0 \times \mathbf{n}. \quad (20)$$

Dans le cas de l'expérience décrite au chapitre 2, la densité de courant électrique est donnée par :

$$J = \frac{I/2}{2\pi r}, \quad (21)$$

où  $I/2$  est le courant injecté qui transite par l'une des deux couches de Hartmann. La vitesse de cœur  $u^0$  (que l'on notera  $u$  par la suite) est alors une fonction linéaire du courant injecté et ne dépend pas du champ magnétique. Elle est donnée par :

$$u = \frac{I}{4\pi r(\sigma/\rho\nu)^{1/2}}. \quad (22)$$

La comparaison des vitesses moyennes mesurées à cette vitesse prédite par la théorie laminaire, et particulièrement leur non dépendance avec le champ magnétique, permettra de confirmer ou non le caractère bidimensionnel de l'écoulement de cœur.

# Chapitre 2

## 2 Dispositif expérimental

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons l'expérience MATUR dans laquelle un écoulement turbulent MHD quasi-2D de mercure est réalisé. Les techniques de mesure du champ de vitesse et de température y sont exposées et leurs validité discutées (des précisions concernant le champ de température seront apportées au chapitre 5). Une méthode complémentaire de mesure de la vitesse à l'aide d'une sonde à ultrasons pulsés est également présentée. Ainsi, une confirmation expérimentale directe du caractère bidimensionnel de l'écoulement de cœur pourra alors être obtenue grâce à cette méthode (chapitre 3). Une partie non négligeable de ce chapitre est vouée à l'étude de l'énergétique de MATUR. Nous montrons par un bilan global d'énergie que la dissipation par effet Joule liée au passage des courants dans les couches de Hartmann peut être très importante, et qu'elle doit faire l'objet d'une attention particulière ; les propriétés physiques du mercure comme pour tout autre fluide, évoluent avec la température.

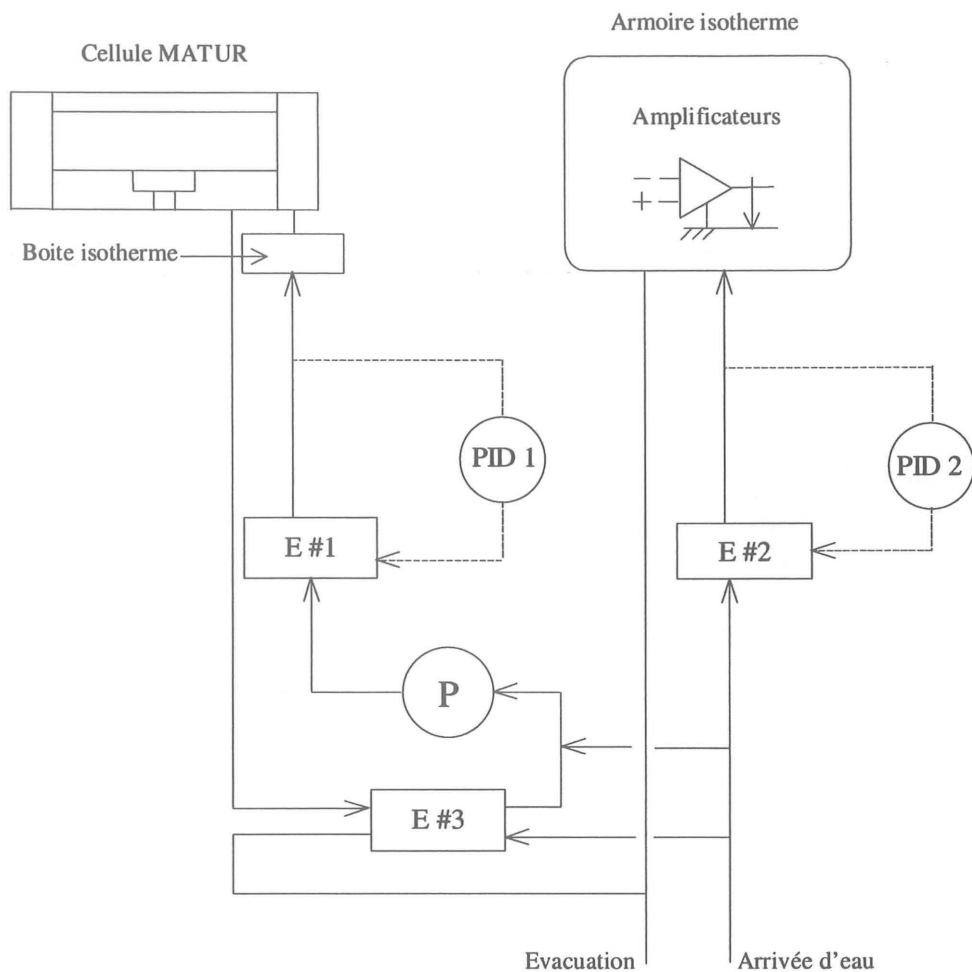
## 2.2 Présentation générale de l'expérience

Le synoptique général de l'expérience MATUR par la figure 2.1 représente . La cellule expérimentale est placée à l'intérieur d'une bobine délivrant un champ magnétique uniforme et vertical pouvant atteindre 6 Tesla. Les divers éléments du dispositif expérimental associés à la cellule (boucles de régulation thermique, chaîne de mesures...) ainsi que la cellule elle même sont décrits dans les paragraphes suivants.

### 2.2.1 La régulation thermique

Les mesures de température à l'aide de thermocouples ainsi que l'utilisation d'amplificateurs analogiques nécessitent la régulation en température de certains éléments du dispositif expérimental. Deux circuits hydrauliques indépendants de régulation thermique sont alors utilisés.

- Une boucle ouverte branchée sur un circuit d'eau industrielle sert à maintenir une température constante dans l'armoire contenant 60 amplificateurs analogiques, dans le but d'éviter le plus possible la dérive des gains. Le contrôle de la température se fait grâce à échangeur thermique électrique (E #2) asservi par une unité de commande PID (PID 2).
- Le deuxième circuit, alimenté dans un premier temps par le circuit d'eau industrielle, fonctionne en boucle fermée grâce à une pompe (P) et un vase de régulation de pression (qui n'est pas représenté sur la figure). Ce circuit comprend à l'amont un échangeur de chaleur électrique (E #1) couplé à un PID (PID 1) contrôlant la température de l'eau à l'entrée de la cellule, de sorte que le mur en cuivre et la boîte isotherme contenant les soudures froides des thermocouples, soient sensiblement à la même température. Les mesures de température dans le mercure à l'aide des sondes pariétales mixtes potentiel/thermocouple seront ainsi rapportées à la température du mur (température de référence). L'échangeur thermique eau/eau (E #3) à la sortie de la cellule sert uniquement à évacuer le flux de chaleur collecté par le mur et provenant du mercure.



E #1 : échangeur thermique électrique

E #2 : échangeur thermique électrique

E #3 : échangeur thermique eau/eau

P : pompe hydraulique

PID 1 et PID 2 : unités de commande des échangeurs E #1 et E #2.

Figure 2.1 : Synoptique général de l'expérience MATUR

### 2.2.2 La cellule expérimentale

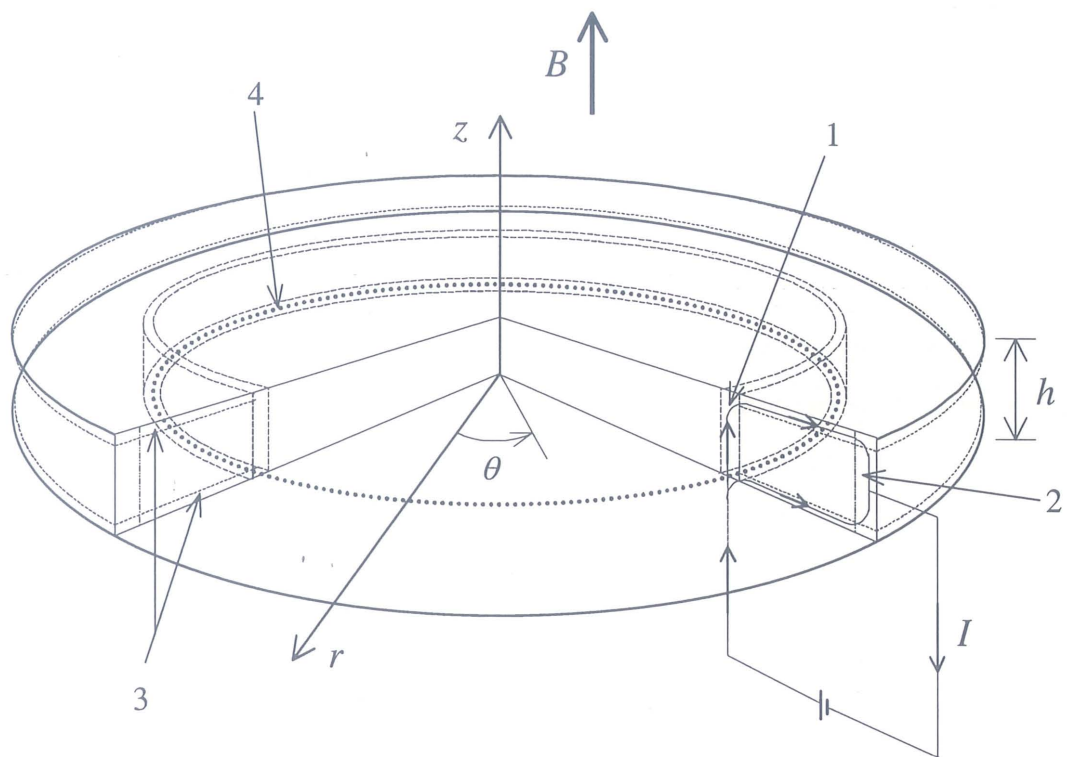
La cellule expérimentale est composée de deux parois circulaires électriquement isolantes, distantes de  $h = 10$  mm et reliées entre elles par un cylindre en cuivre de rayon intérieur  $R = 110$  mm. La cavité formée par ces deux plaques et le cylindre, de

rapport de forme  $\Gamma = 2R/h = 22$ , est remplie de mercure (figure 2.2). Le diamètre extérieur de la cellule, qui est limité par le diamètre de la bobine de champ magnétique, est de 260 mm. Un système de remplissage relié à une pompe à vide est disposé sur la paroi supérieure et permet d'injecter sous atmosphère contrôlée du mercure à l'intérieur de la cellule. Un vide primaire puis un remplissage d'argon (réducteur d'oxygène) sont réitérés afin que le mercure s'oxyde le moins possible pendant la phase de remplissage.

Deux cercles concentriques d'électrodes sont disposés dans la paroi inférieure de la cellule (figure 2.2). Le premier de rayon  $R_i = 54$  mm comprend 140 électrodes espacées de 2.42 mm et de 1 mm de diamètre chacune. Le deuxième cercle, d'un rayon  $R_i = 93$  mm, comprend 230 électrodes équidistantes de 2.53 mm. Sur la surface supérieure de chaque électrode, sont déposées par électrolyse deux couches fines de nickel puis d'or, formant par oxydo-réduction avec le mercure, un amalgame assurant un bon contact électrique. Ce procédé est aussi appliqué sur la surface intérieure du mur en cuivre ainsi que sur les sondes de mesure. A l'extrémité inférieure de chaque électrode, une résistance de 1.1 ohms ( $\Omega$ ) est soudée, formant alors un circuit de 140 (ou 230 suivant le cercle utilisé) résistances en parallèles assurant une bonne uniformité suivant  $\theta$  du courant injecté.

Un plot chauffant de 40 mm de diamètre électriquement isolé à l'aide d'un revêtement spécial, occupe le centre de la paroi inférieure (figure 2.3). Un flux de chaleur d'une puissance constante égale à 10 Watts peut alors être injecté dans le volume de mercure grâce à ce dispositif. Ce flux est en partie évacué par le mur extérieur maintenu à température constante. Les parois supérieure et inférieure sont supposées adiabatiques vue leur très faible conductivité thermique.

Les mesures de températures sont réalisées à l'aide de sondes thermocouples noyées dans la paroi inférieure (§ 2.3.2). Une enceinte indépendante en cuivre située juste au dessous de cette paroi est maintenue à la même température de référence que le mur extérieur et sert de boîte isotherme aux soudures froides des thermocouples.



1 : couche parallèle cisailée libre. 2 : couche parallèle pariétale. 3 : couches de Hartmann. 4 : cercle d'électrodes

Figure 2.2 : Schéma de la cellule expérimentale MATUR

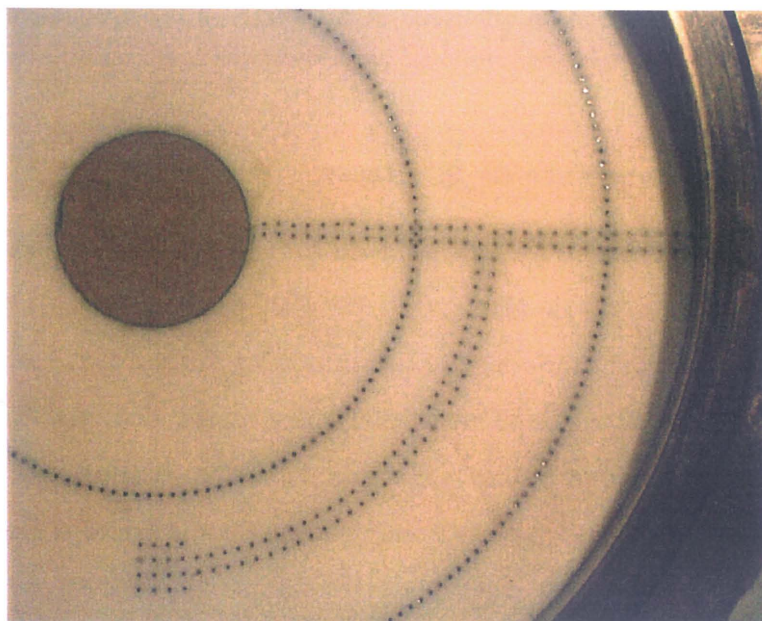


Figure 2.3 : Vue de dessus de la paroi inférieure



**L'écoulement** Pour un nombre de Hartmann très grand devant l'unité, le courant  $I$  qui est injecté par l'un des deux cercles d'électrodes vers le mur extérieur passe dans les couches limites qui se développent près des parois perpendiculaires au champ magnétique (couches de Hartmann). La couronne extérieure de mercure ( $R_{inj} < r < R$ ) est ainsi mise en mouvement par la force de Laplace, entraînant, *via* un transfert de quantité de mouvement, la partie centrale du fluide ( $0 < r < R_{inj}$ ) où le courant est nul. Ce transfert de quantité de mouvement est essentiellement localisé dans la couche cisailée entre les deux domaines fluides qui est extrêmement instable (profil de vitesse inflexionnel). Les instabilités qui se développent au sein de cette couche parallèle sont à l'origine de cette turbulence quasi-2D.

## 2.3 L'instrumentation

Un ensemble de 140 sondes pariétales mixtes potentiel/thermocouple sont insérées dans la paroi inférieure de la cellule et permettent de mesurer à la fois les deux composantes de la vitesse et la température. Le principe de mesure de la vitesse et de la température sont décrits dans ce paragraphe. L'influence du champ de température sur la mesure de la vitesse ainsi que la perturbation du signal thermoélectrique par le signal MHD ( $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ) y sont analysées. Enfin les détails de conception ainsi que les caractéristiques des sondes utilisées et du système d'acquisition des données sont présentés.

### 2.3.1 Principe de mesure de la vitesse

Le champ de vitesse de l'écoulement de cœur est déduit des mesures de potentiel électrique faites à la paroi de Hartmann. En effet pour des grands nombres de  $Ha$ , le potentiel électrique peut être considéré comme constant suivant la direction du champ magnétique (voir par exemple Moreau 1990). Les sondes de mesures peuvent alors être noyées dans l'une des deux paroi de Hartmann. Cette méthode qui est non intrusive, ne l'est qu'à première vue, car ces sondes étant conductrices d'électricité diminuent le temps de freinage dans les couches de Hartmann  $\tau_H$ , et freinent donc un peu plus l'écoulement. Nous verrons par la suite (§ 3.4.1) que cette perturbation du champ de vitesse n'est pas très importante et est pratiquement négligeable à faibles régimes

d'écoulement ( $I \leq 50$  A,  $Re \leq 2.5 \times 10^6$ ). Cette technique de mesure découle de la propriété des écoulements MHD quasi-2D selon laquelle la loi d'ohm se réduit, au premier ordre d'un développement limité en  $Ha^{-1}$ , à  $-\nabla\varphi + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Les deux composantes de la vitesse,  $u_\theta$  et  $u_r$ , s'obtiennent donc à partir de la relation suivante

$$(u_r, u_\theta) = \frac{1}{B} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (23)$$

où  $\varphi$  est potentiel électrique local.  $r$  et  $\theta$  étant les coordonnées radiale et azimutale.

Cette technique de mesure, valable que si l'écoulement est quasi-bidimensionnel, possède deux atouts majeurs. Premièrement, une inertie quasi-nulle vu que le potentiel électrique suit instantanément le champ de vitesse, et deuxièmement, il n'est pas nécessaire de procéder à un étalonnage avant chaque série de mesure comme cela est souvent le cas pour d'autres techniques (film et fil chaud par exemple). La précision de la mesure dépend principalement de la taille caractéristique de la sonde (plus précisément de la distance entre deux fils de platine voisins, voir § 2.3.4).

### 2.3.2 Mesure des potentiels électriques

Les différences de potentiels sont mesurées par deux fils platine (Pt) placés en deux points distincts  $m$  et  $n$  de la paroi inférieure de la cellule. En ces points règnent des températures  $T_m$  et  $T_n$  et le potentiel électrique a pour valeurs  $\varphi_n$  et  $\varphi_m$ . Le signal électrique à l'entrée d'un amplificateur,  $S_{\Delta\varphi}(m, n)$ , s'exprime comme la différence de potentiel entre les points  $m$  et  $n$ ,  $[\varphi_m - \varphi_n]_{MHD}$ , à laquelle s'ajoute une contribution thermoélectrique. L'expression de  $S_{\Delta\varphi}(m, n)$  est déterminée par la loi d'ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla\varphi + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - P \cdot \nabla T), \quad (24)$$

où  $\mathbf{j}$ ,  $\varphi$ ,  $\mathbf{u}$  et  $P$  désignent respectivement la densité de courant, le potentiel électrique, le champ de vitesse et le pouvoir thermoélectrique absolu considéré. L'application de la loi d'ohm (24) au circuit  $(n, p, q, r, s, m)$  (figure 2.4) permet d'exprimer les tensions sur chacun des éléments  $(m, n)$ ,  $(n, p)$ ,  $(p, q)$ ,  $(q, r)$ ,  $(r, s)$  et  $(s, m)$  :

$$\text{entre } (n, p) : \varphi_p - \varphi_n = P_{Pt} \times (T_n - T_0), \quad (25)$$

$$\text{entre } (p, q) : \varphi_q - \varphi_p = P_{Pt} \times (T_0 - T_e), \quad (26)$$

$$\text{entre } (q, r) : \varphi_r - \varphi_q = S_{\Delta\varphi}(m, n), \quad (27)$$

$$\text{entre } (r, s) : \varphi_s - \varphi_r = P_{Cu} \times (T_e - T_0), \quad (28)$$

$$\text{entre } (s, m) : \varphi_m - \varphi_s = P_{Pt} \times (T_0 - T_m), \quad (29)$$

$$\text{entre } (m, n) : \varphi_n - \varphi_m = [\varphi_n - \varphi_m]_{MHD} + P_{Hg} \times (T_m - T_n), \quad (30)$$

où  $[\varphi_n - \varphi_m]_{MHD} = \int_m^n (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \mathbf{j}/\sigma) ds$  est la différence de potentiel électrique dans le mercure induite par la vitesse débitante entre les deux points  $m$  et  $n$ .

Le signal électrique  $S_{\Delta\varphi}(m, n)$  avant amplification est déduit des relations (25 à 30) et est donné par :

$$S_{\Delta\varphi}(m, n) = P_{Pt/Hg} \times (T_m - T_n) + [\varphi_m - \varphi_n]_{MHD}. \quad (31)$$

Le coefficient  $P_{Pt/Hg} = P_{Pt} - P_{Hg}$  représente le pouvoir thermoélectrique relatif entre le platine et le mercure. Ce pouvoir dépend entre autre de la qualité du mercure utilisé. Des mesures de pouvoirs thermoélectriques réalisées au laboratoire ont montré que  $P_{Pt/Hg}$  varie linéairement avec l'écart de température entre le mercure et la soudure froide

$$(\Delta T = T_n - T_0) P_{Pt/Hg} = 0.0116 \Delta T + 0.23 \text{ } [\mu V/^{\circ}C]. \quad (32)$$

Les écarts maximum de température entre le mercure et la boîte froide mesurés dans notre expérience sont de l'ordre de  $15^{\circ}C$ , ce qui conduit à un pouvoir relatif de l'ordre de  $0.4 \mu V/^{\circ}C$ . Pour une différence de température  $\Delta T$  de l'ordre de  $1^{\circ}C$  entre les points  $m$  et  $n$ , le signal thermoélectrique  $P_{Pt/Hg}(T_m - T_n)$  correspondant est de l'ordre de quelques dixièmes de micro-Volts et reste donc inférieur au signal correspondant à la vitesse  $[\varphi_n - \varphi_m]_{MHD}$  mesuré entre ces deux points ( $[\varphi_n - \varphi_m]_{MHD} \geq$  quelques mV). Il n'est donc pas nécessaire de corriger le signal "brut" de vitesse et on prendra :

$$S_{\Delta\varphi}(m, n) = [\varphi_m - \varphi_n]_{MHD}. \quad (33)$$

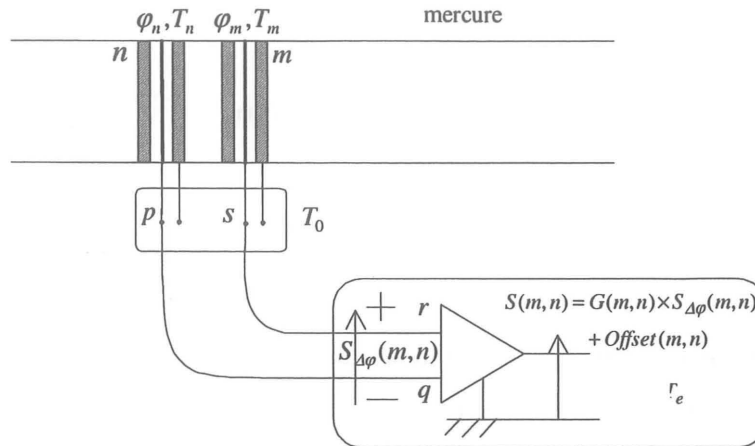


Figure 2.4 : Mesures des potentiels électriques

### 2.3.3 Mesure des températures

La mesure de la température fait intervenir le couple thermoélectrique platine cupro-nickel ainsi qu'une température de référence  $T_0$  (température des soudures froides dans la boîte isotherme). Comme pour les signaux de vitesse, le signal de la température est amplifié avec un gain  $G$  (fixé à  $500 \pm 5\%$  dans ce cas). Le signal en sortie d'amplificateur est donné alors par :

$$S(m) = G(m) \times S_{T_m} + Offset(m) \quad (34)$$

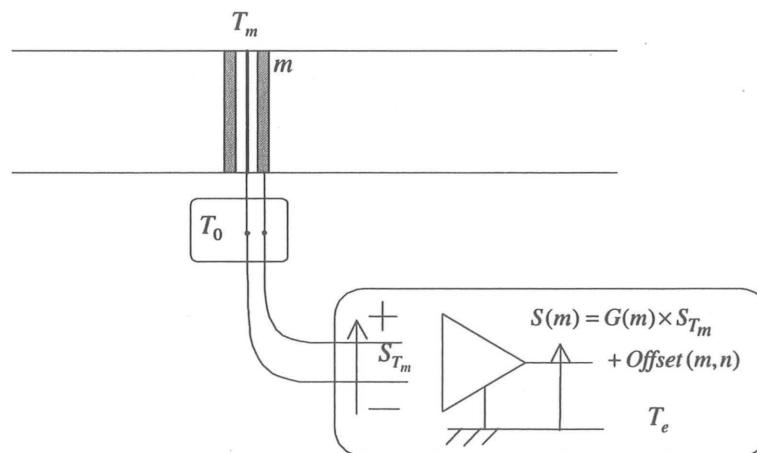


Figure 2.5 : Mesures des températures par thermocouple

L'influence du champ de vitesse sur la mesure de la température est détaillée dans le paragraphe suivant ("Perturbation du signal thermoélectrique par le signal MHD

$(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ ).

### 2.3.4 La sonde mixte potentiel/thermocouple

Le principe des sondes mixtes potentiel/thermocouple consiste à remplacer la soudure froide d'un thermocouple classique par un contact direct platine-mercure-cupro-nickel (Pt-Hg-Cu/Ni). Ainsi, la mesure de la différence de potentiel (ddp) entre le platine et le cupro-nickel donne la température moyenne du volume de mercure au contact immédiat avec les deux matériaux. Dans ce cas, le temps de réponse du signal est très inférieur au temps de réponse d'un thermocouple classique car l'on s'affranchit de l'inertie thermique du point de soudure. La vitesse locale est déduite de la ddp entre les fils de platine de deux sondes voisines.

**Effet de la taille caractéristique de la sonde sur la mesure de la vitesse** La taille typique des sondes (ici, la distance  $d$  entre deux fils de platine, figure 2.6) doit être prise en compte dans le calcul des spectres d'énergie car, ne permettant pas d'atteindre des échelles plus petites que sa taille, elle introduit *via* l'hypothèse de Taylor, une erreur dans le calcul du spectre fréquentiel (Wyngaard, 1968). Il convient alors d'apporter une correction afin de compenser cet effet de filtre d'échelle "spatiale". Si on admet que la vitesse mesurée  $u$  entre deux fils de platines distant de  $d$ , est égale à la moyenne spatiale de la vitesse "vraie"  $u^t$  :

$$u(x^m) = \frac{1}{d} \int_{x^m-d/2}^{x^m+d/2} u^t(x) dx, \quad (35)$$

on montre que cette vitesse s'écrit comme le produit de convolution entre la transformée de Fourier de la vitesse "vraie"  $u^t$ , et un facteur correctif dépendant de la taille de la sonde (Citriniti *et al.*, 1997) :

$$u(x^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^t(k) \exp(ikx) \left[ \frac{\sin(kd/2)}{kd/2} \right] dk. \quad (36)$$

Cette équation indique que la contribution apparente de n'importe quel coefficient de Fourier à la vitesse  $u$ , n'est plus  $\hat{u}(k)$  mais  $\hat{u}(k) \times \left[ \frac{\sin(kd/2)}{kd/2} \right]$ , ce qui veut dire que

l'information aux grands nombres d'ondes (petites échelles) sur la vitesse mesurée est moins importante que celle de la vitesse réelle de l'écoulement. Cette correction a été appliquée à un grand nombre de spectres et a montré qu'elle était significative uniquement la zone du spectre correspondant au bruit ( $k \gtrsim 0.8 \text{ cm}^{-1}$ ).

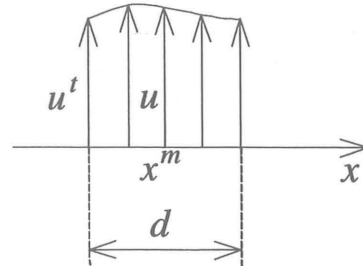


Figure 2.6 : Vitesse "vraie"  $u^t$  et vitesse mesurée  $u$  entre deux fils de platine.

**Perturbation du signal thermoélectrique par le signal MHD ( $u \times B$ )** Au signal thermoélectrique délivré par le couple platine cupro-nickel, vient s'ajouter une différence de potentiel  $\Delta\varphi$  correspondant à la vitesse débitante entre ces deux fils (figure 2.7). Cette perturbation du signal thermoélectrique peut être minimisée en remplaçant les deux fils Pt/Ct par un tube de CuproNickel (Cu/Ni) dans lequel se trouve centré un fil de platine. Une gaine téflon placée autour de ce dernier assure l'isolation électrique entre le platine et le Cu-Ni (figures 2.9). En effet, pour un centrage parfait, la contribution du signal  $u \times B$  entre le platine et le bord droit du tube se trouve ainsi équilibrée par celle prise entre le platine et le bord gauche du tube ( $\Delta\varphi_2 \simeq \Delta\varphi_1$ , figure 2.7). Un décentrage de l'ordre de  $10^{-2} \text{ mm}$  peut induire une erreur de l'ordre de 20% sur la valeur moyenne de la température comme le montre la figure 2.8.c. Les signaux présentés dans cette figure sont obtenus avec deux sondes coaxiales, la première avec un fil de platine bien centré par rapport au tube de Cu/Ni et la deuxième avec un fil très légèrement excentré par rapport à l'axe du tube (figure 2.7). Pour mettre en évidence la perturbation du signal thermoélectrique par le signal MHD, le courant électrique (ici égal à 40 A) est injecté puis coupé après environs 47 s d'acquisition. Si la moyenne du signal de température calculée avant la coupure du courant ne diffère que de quelques pour-cents (typiquement 2%) par rapport à celle calculée sur les cinq secondes à partir de l'instant où la vitesse atteint 0, on peut considérer que l'influence du signal  $u \times B$  (plus précisément  $\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$ ) sur le signal de  $T$  est négligeable.

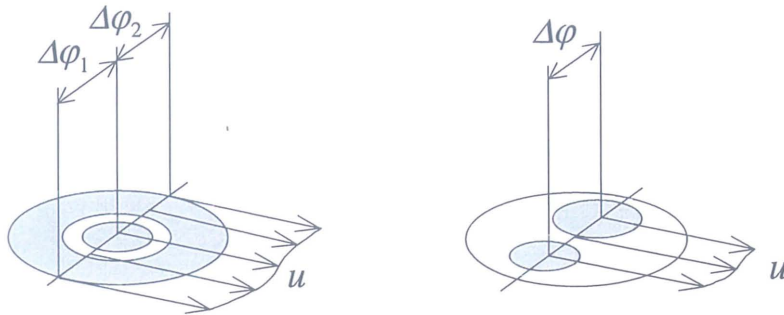


Figure 2.7 : Influence du champ électromoteur  $u \times B$  dans le cas d'une sonde "coaxiale" (à gauche) et dans le cas d'une sonde "parallèle" (à droite).

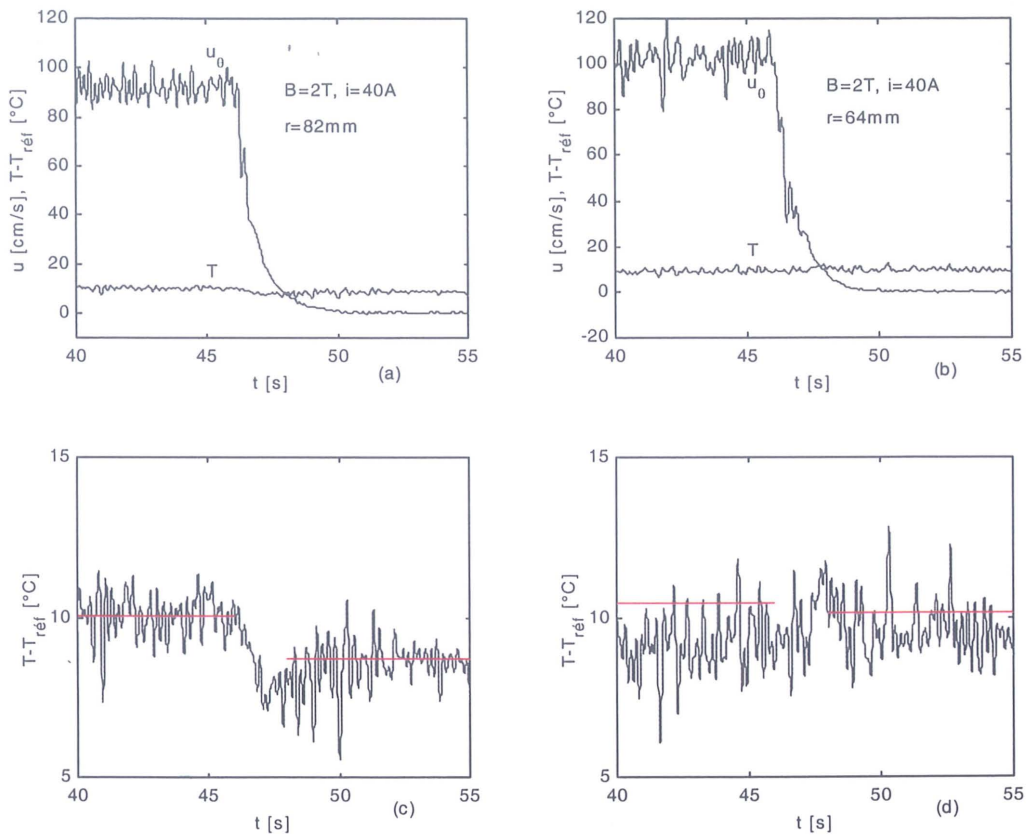


Figure 2.8 : Signaux filtrés à 10 Hz de  $u_\theta$  et  $T$ . Les traits continus sur les figures c et d représentent la moyenne temporelle du signal de température réalisée sur 47 s de signal avant coupure du courant et sur 5 s à partir de l'instant où la vitesse s'annule.

**Architecture de la sonde** La sonde coaxiale est composée d'un fil de platine de 0.15 mm de diamètre entourée d'une gaine téflon d'un diamètre intérieur de 0.2 et d'un



diamètre extérieur de 0.4 mm. Le tout est inséré à l'intérieur d'un tube cupro-nickel de 0.4 mm de diamètre intérieur et de 0.8 de diamètre extérieur. Afin de centrer le fil de platine par rapport au tube de Cu-Ni on rétreint l'ensemble jusqu'à ce que le diamètre extérieur du tube atteigne 0.6 mm. L'étanchéité de la sonde est assurée à l'aide d'une résine et d'une gaine thermo-rétractable (figure 2.16, annexe 1).

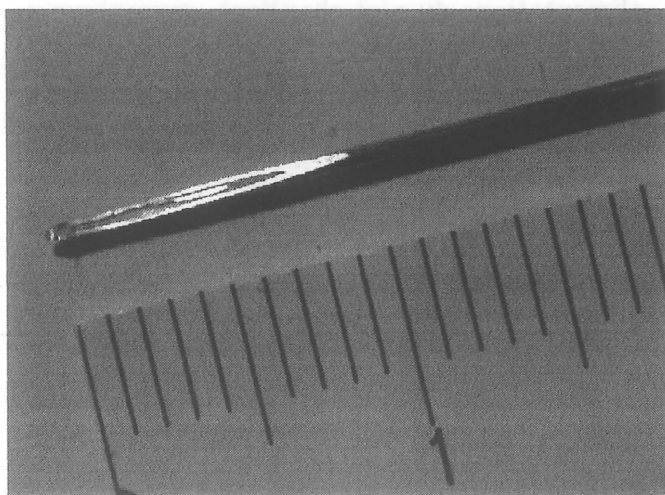


Figure 2.9 : Vue en coupe d'une sonde coaxiale. On aperçoit au centre le fil de platine, la gaine téflon à sa droite, puis le tube de cupro-nickel (Cu/Ni).

### 2.3.5 Emplacement des sondes

140 sondes coaxiales mixtes divisées en trois groupes ont été insérées à la paroi inférieure de la cellule. Comme le montrent les figures 2.3 et 2.18 (annexe 1), un premier groupe de 60 sondes est disposé sur deux rayons voisins et sert à mesurer les composantes radiale et azimutale de la vitesse ainsi que la température à différents rayons. Un deuxième ensemble de 64 sondes est disposé le long d'un arc et sert à mesurer principalement des vitesses radiale et azimutale en différentes positions angulaires afin de calculer les fonctions d'inter-corrélations temporelles et spatiales. Enfin, un troisième ensemble de 16 sondes formant un pavage permet de mesurer la vorticité.

### 2.3.6 Acquisition et traitement des données

Les mesures de potentiel électrique nécessitent un blindage soigné des fils émanant des sondes de mesure. Ces fils ainsi que les câbles d'alimentation électrique ont au



préalable été torsadés deux à deux afin de compenser les forces de Laplace dues au passage du courant et au champ magnétique. Par ailleurs tous les éléments de la chaîne d'acquisition (la cellule expérimentale, les différents blindages, la boîte de connexion sondes/amplis, les masses des amplificateurs analogiques, les masses de la carte d'acquisition etc...) ainsi que les différentes alimentations électriques (alimentations des amplificateurs, alimentations du plot chauffant, générateur de courant pour la cellule) sont reliés à la terre. Cette précaution, essentielle, permet de maintenir le même potentiel électrique de référence pour tous les éléments du dispositif expérimental.

Les signaux électriques délivrées par les sondes sont amplifiés puis filtrés à l'aide de filtres analogiques passe-bas à 15 Hz. Les gains des amplis sont ajustables en fonction des signaux d'entrée (allant de 200 à 2000) de sorte à ce que le signal en sortie occupe le mieux possible la gamme  $\pm 5$  Volts du convertisseur de la carte d'acquisition. La valeur des gains est vérifiée assez souvent à l'aide d'une alimentation stabilisée et les offset des amplis (ou zéros d'amplis) sont mesurés avant chaque acquisition de données et sont pris en compte dans les programmes de post-acquisition.

Les signaux en sortie des amplificateurs sont convertis, échantillonnés puis stockés à l'aide d'une carte d'acquisition *Keithley DAS 1801 HC* à 64 entrées. Le convertisseur permet de coder le signal sur 12 bits c'est à dire sous forme d'entiers compris entre 1 et  $2^{12}$ . Ceci détermine la précision avec laquelle le signal est numérisé qui dans ce cas est de  $10/2^{12}$  Volts (2.44 mV). La fréquence d'échantillonnage utilisée est de l'ordre d'une centaine de Hz, bien supérieure à deux fois la fréquence de coupure du signal imposée par le filtre passe-bas (15 Hz), afin d'éviter tout recouvrement de spectres. Le traitement numérique des données est réalisé sous *Matlab*.

## 2.4 Vélocimétrie à ultrasons pulsés

### 2.4.1 Nécessité

Nous avons vu que les mesures de potentiel à la paroi, desquelles sont déduites les vitesses de cœur, s'appuient sur l'hypothèse de quasi-bidimensionalité de l'écoulement. Cette hypothèse est bien vérifiée à partir du moment où les parois de Hartmann sont isolantes et que le nombre de Hartmann est très grand devant l'unité (Sommeria &

Moreau, 1982). Il semble cependant nécessaire d'apporter une preuve expérimentale directe de la quasi-bidimensionalité de l'écoulement de cœur. La mesure du potentiel électrique suivant la direction du champ ( $z$ ) ne pouvant être réalisée sans perturber l'écoulement, nous avons choisi d'utiliser une sonde à ultrasons pulsés pour réaliser ces mesures. Le principe général de ces mesures ainsi que quelques remarques sur le protocole expérimental sont exposés. Les résultats concernant les profils de vitesses suivant  $z$  seront présentés au chapitre 3.

### 2.4.2 Principe général de la mesure

Le principe de la mesure ultrason repose sur la variation de la fréquence d'une onde monochromatique résultant d'un changement de référentiel (effet Doppler). Une onde ultrason est émise dans le mercure par un transducteur fixe à une fréquence  $f_e$ , atteignant des particules solides en suspension dans le mercure (oxydes, dont l'impédance acoustique est différente de celle du mercure). Ces particules dont la masse volumique est très proche de celle du milieu environnant, sont animées d'une vitesse  $U$  que l'on confondra avec celle de l'écoulement. La fréquence  $f_g$  de l'onde perçue par une particule est donnée par la relation :

$$f_g = f_e \pm \frac{f_e U \cos \theta}{c}, \quad (37)$$

où  $\theta$  est l'angle formé par la trajectoire de la particule avec la direction de propagation de l'onde (– quand on s'éloigne de la source et + quand on s'en rapproche). Cette onde, partiellement réfléchie par la particule, est perçue à son tour par le transducteur (émetteur/récepteur) avec une fréquence  $f_r$  qui vaut

$$f_r = \frac{c}{c \mp U \cos \theta} f_g. \quad (38)$$

De ces deux relations on détermine la fréquence  $f_D = f_e - f_r$ , dite fréquence Doppler et qui, après un développement à l'ordre 1 en  $U/c$  ( $U \ll c$ ), s'écrit sous la forme suivante :

$$f_D = \pm \frac{2f_e U \cos \theta}{c}. \quad (39)$$

La fréquence émise  $f_e$  et la fréquence mesurée  $f_r$  par le transducteur permettent de déterminer la valeur de la projection de la vitesse sur l'axe de propagation de l'onde  $U \cos \beta$ . Maintenant, pour déterminer la position de la particule, il est nécessaire que l'onde émise soit pulsée. L'émission de trains d'ondes de fréquence  $f_e$  (quelques Mhz) pulsés à une fréquence  $f_{PRF}$  (quelques khz) permet en effet de localiser une à une toutes les particules se trouvant sur l'axe d'émission (ou axe de tir), évitant ainsi d'obtenir une multitude d'échos (retour de signal) pour chacune d'elles. La distance source/particule  $d$  est déterminée par le temps mis par un train d'onde pour parcourir deux fois la distance transducteur/particule ( $T_{a/r}$ ) :

$$d = \frac{c T_{a/r}}{2}. \quad (40)$$

Une distance maximale de mesure est imposée par le temps entre deux pulses successifs  $T_{PRF}$  et est donnée par la relation :

$$d_{\max} = \frac{c T_{PRF}}{2}. \quad (41)$$

Si on augmente ce temps, on augmente la distance maximale de mesure mais on diminue en même temps la fréquence Doppler maximale mesurable et donc la vitesse maximale mesurable. Pratiquement, on choisit une fréquence  $f_{PRF} = 1/T_{PRF}$  assez petite afin de réduire l'effet des différentes réflexions causées par les différentes interfaces acoustiques (particules).

### 2.4.3 Protocole expérimental

Le vélocimètre ultrason (DOP1000) ainsi que la sonde utilisée sont développés par la société *Signal Processing S.A.* est en principe étalonné par le constructeur. Des mesures de vitesse en écoulement tournant, sans champ magnétique ont été réalisés dans du Gallium liquide ainsi que dans de l'eau, et ont montré dans ce dernier cas un bon accord avec des résultats de visualisations (Brito *et. al.*, 2000). Les tests préliminaires sans écoulement ont montré, que dans la gamme de champ magnétique utilisé (0.017–0.17 T), le signal électrique délivré par la sonde (ici l'écho correspondant aux parois de la cellule) était insensible aux variations du champ magnétique.

**Positionnement de la sonde ultrasons** . Trois encoches sont usinées dans le mur en cuivre de sorte à ce que la sonde ultrason puisse être plaquée contre une surface plane (condition nécessaire pour l'obtention d'un signal). La célérité du son dans le cuivre ( $c_{Cu}$ ) étant différente de celle du mercure ( $c_{Hg}$ ), l'onde ultrason est refractée à l'interface cuivre/mercure. Le rapport des angles d'incidence de l'onde dans le cuivre et le mercure (respectivement  $i_{Cu}$  et  $i_{Hg}$ ) est proportionnel au rapport des célérités et est donné par la relation suivante :

$$\frac{\sin(i_{Cu})}{c_{Cu}} = \frac{\sin(i_{Hg})}{c_{Hg}} \quad (42)$$

La direction de propagation de l'onde ultrason pour les trois encoches est représentée sur la figure 2.10. Connaissant  $r_0$  et la fonction  $R(x_{dop})$  on écrit pour chaque encoche

$$\frac{U_\theta}{U_{dop}} = \frac{R(x_{dop})}{r_0}, \quad (43)$$

ce qui permet de retrouver la vitesse  $U_\theta$  à partir de sa projection sur l'axe de tir  $U_{dop}$ .

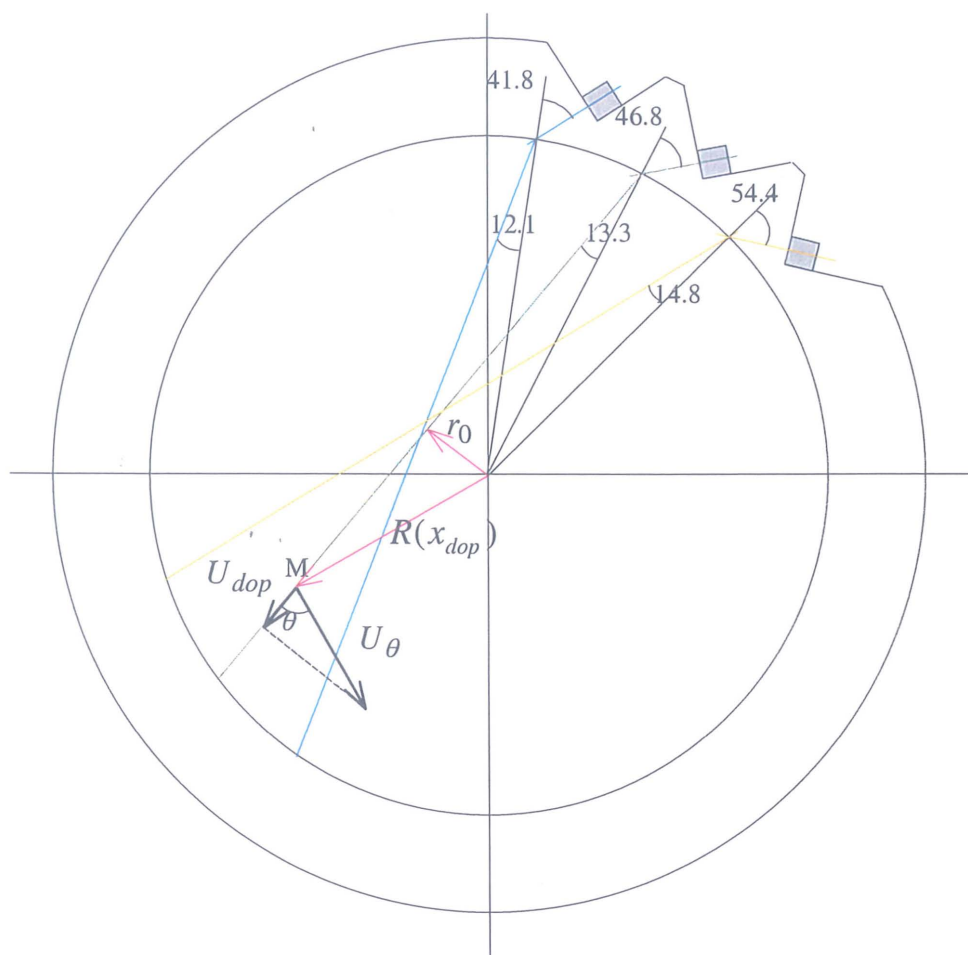


Figure 2.10 : Directions de propagation de l'onde ultrasons

**Reproductibilité des mesures** Les mesures réalisées dans le mercure en mouvement montrent qu'elles sont reproductibles à condition que les particules solides (oxydes) soient bien réparties dans tout le volume du mercure (Brito *et. al.*, 2000). Une des solutions simples est de vider puis de remplir la cellule avant chaque campagne de mesure. Ceci permet en effet d'obtenir un bon signal reproductible pendant environs 90 min. La figure 2.11 montre des profils d'écarts relatifs entre deux séries de mesures  $U_{dop-1} - U_{dop-2} / U_{dop-1}$  réalisées à plusieurs jours d'intervalle dans les mêmes conditions expérimentales. L'écart maximum entre les vitesses mesurées est globalement inférieur à 5% dans la zone extérieure de l'écoulement ( $R > R_i$ ) et peut atteindre 10% dans la zone proche du centre de la cellule car les vitesses y sont relativement faibles et la résolution spatiale moins bonne.

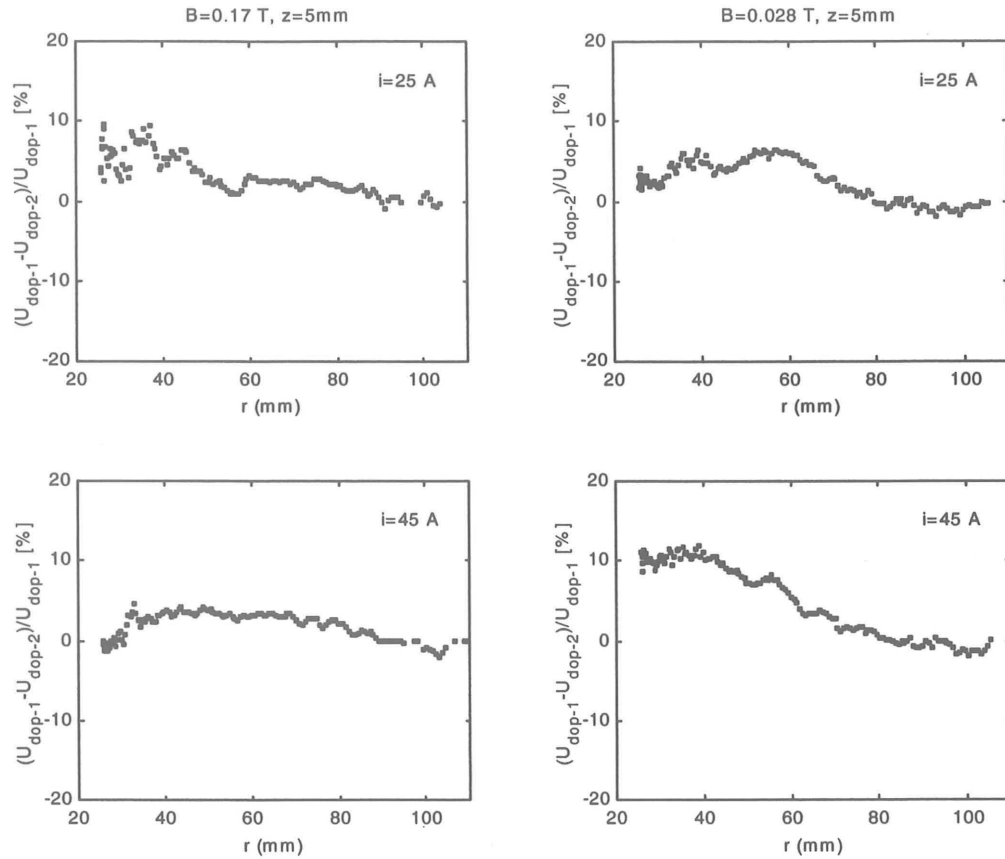


Figure 2.11 : Ecart relatifs  $U_1 - U_2 / U_1 (\%)$  entre deux séries de mesures pour deux valeurs de champ et deux valeurs du courant ( $B = 0.17$  et  $0.028 \text{ T}$  et  $I = 25$  et  $45 \text{ A}$ ).

## 2.5 Bilan énergétique

### 2.5.1 Schéma électrique et mesures

Dans ce paragraphe on se propose d'évaluer la puissance fournie au mercure par un bilan énergétique global. Le schéma électrique équivalent de l'installation expérimentale est représenté par la figure 2.12. On note  $U$  la tension aux bornes du générateur,  $R_0$  la résistance globale des câbles d'alimentation électrique,  $R$  la résistance équivalente de l'ensemble des 140 résistances de  $1.1 \Omega$  placées en parallèle ( $R = \frac{1.1}{140} = 7.9 \text{ m}\Omega$ ),  $R_{Hg}$  la résistance du mercure et  $I$  le courant électrique qui transite dans le circuit. La résistance  $R_0$  est déterminée à partir du tableau 2.1 et de la relation (44) pour  $B = 0$  (c'est à dire en l'absence d'écoulement).

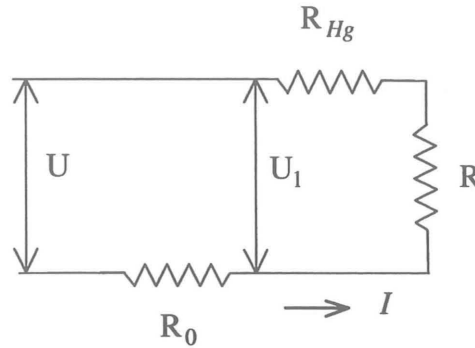


Figure 2.12 : Schéma du circuit électrique équivalent

$$R_0 = \frac{U - U_1}{I}. \quad (44)$$

I (A)	20	50	75	100	125
U (mV)	337	836	1256	1681	2103
U <sub>1</sub> (mV)	160	408	608	811	1010
R <sub>0</sub> (mΩ)	8.85	8.56	8.56	8.70	8.74

Tableau 2.1

On prendra comme valeur pour  $R_0$  la moyenne arithmétique de la dernière ligne du tableau :  $2.1 R_0 \simeq 8.7 \text{ m}\Omega$ .

La loi d'ohm pour le circuit global s'écrit :

$$U = (R_0 + R + R_{Hg}) I, \quad (45)$$

et permet de déterminer la valeur de la résistance  $R_{Hg}$  afin de calculer la puissance totale fournie au mercure,  $P_{Hg} = R_{Hg} I^2$ . La loi de variation de  $P_{Hg}$  en fonction du courant injecté et du champ appliqué est ensuite déterminée. Le tableau ci-après ainsi que les figures 2.13 et 2.14 résument les résultats obtenus.

I(A)	B(T)	1	2	3	4	5	6
20	U(mV)	361	386	407	435	459	485
	$R_{Hg}(m\Omega)$	1.52	2.77	3.82	5.22	6.42	7.72
	$P_{Hg}(\text{watt})$	0.6	1.11	1.53	2.08	2.57	3.08
50	U	899	952	1012	1070	1130	1193
	$R_{Hg}$	1.45	2.51	3.71	4.87	6.07	7.33
	$P_{Hg}$	3.62	6.27	9.28	12.17	15.17	18.32
75	U	1334	1435	1520	1605	1684	1771
	$R_{Hg}$	1.26	2.6	3.73	4.87	5.92	7.08
	$P_{Hg}$	7.08	14.62	20.98	27.39	33.3	39.82
100	U	1772	1913	2030	2140	2251	2351
	$R_{Hg}$	1.19	2.6	3.77	4.87	5.98	6.98
	$P_{Hg}$	11.9	26	37.7	48.7	59.8	69.8
125	U	2203	2385	2540	2680	2811	2953
	$R_{Hg}$	1.1	2.55	3.79	4.91	5.95	7.09
	$P_{Hg}$	17.18	39.84	59.22	76.72	92.97	110.8

Tableau 2.2



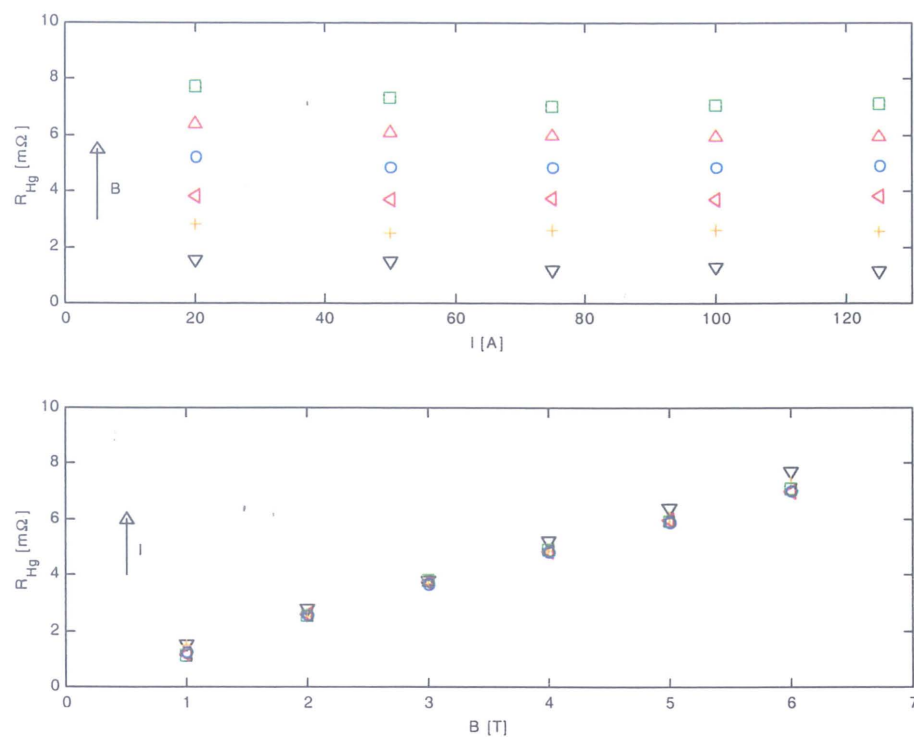


Figure 2.13 : Evolution de la résistance  $R_{Hg}$  en fonction du courant électrique et du champ magnétique

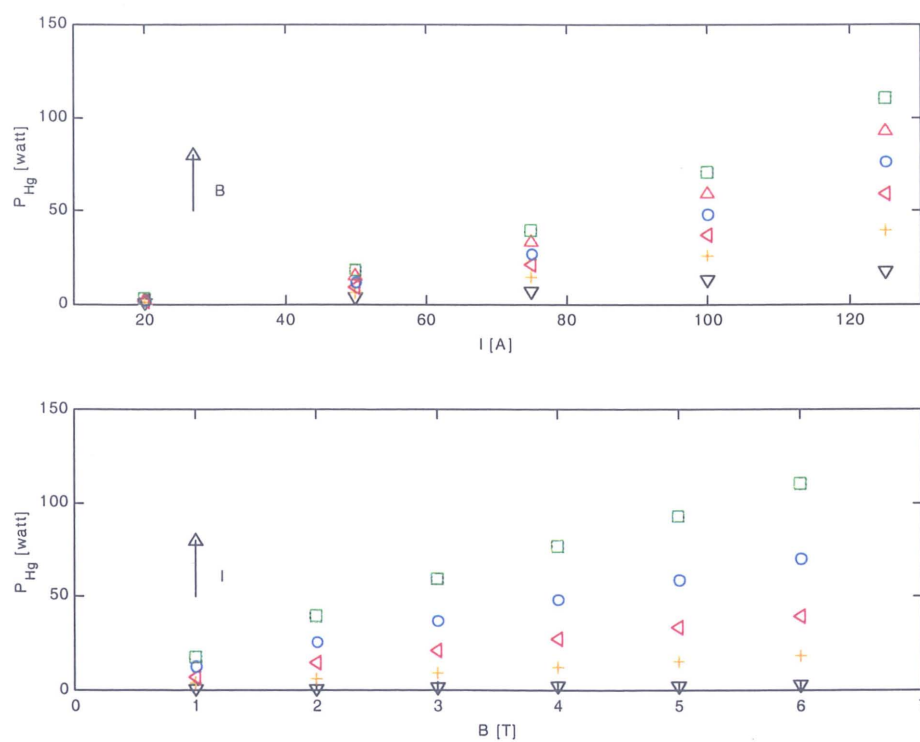


Figure 2.14 : Evolution de la Puissance fournie au mercure  $P_{Hg}$  en fonction du courant injecté  $I$  (a) et du champ magnétique  $B$  (b)

### 2.5.2 Calcul de la puissance fournie

Soit  $I$  le courant injecté dans le volume de mercure compris entre les rayons  $R_i$  et  $R$ . Pour un nombre de Hartmann suffisamment grand, ce courant se divise en deux parties égales traversant les deux couches de Hartmann. La densité de courant électrique  $j$  s'écrit :

$$j = j_p \exp(-z/\delta), \quad (46)$$

où  $j_p$  est la densité de courant à la paroi et  $\delta_{Ha} = h/Ha$  l'épaisseur de la couche Hartmann. La conservation du courant permet d'écrire :

$$\int_0^\infty j_p \exp(-z/\delta) dz = j_p \delta = \frac{I}{4\pi r}. \quad (47)$$

En injectant la valeur de la densité de courant à la paroi ainsi obtenue, dans (46) on obtient

$$j = \frac{I}{4\pi r \delta} \exp(-z/\delta). \quad (48)$$

La puissance élémentaire  $p_{Hg}(r, z)$  fournie au mercure s'écrit

$$p_{Hg}(r, z) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\theta = \frac{I^2 B}{16\pi^2 r^2 \delta \sqrt{\sigma \rho \nu}} [\exp(-z/\delta) - \exp(-2z/\delta)], \quad (49)$$

où  $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{IB}{4\pi r \delta} \exp(-z/\delta) \cdot \mathbf{e}_\theta$  est la force de Laplace s'exerçant sur la couronne extérieur de mercure. En intégrant cette relation selon  $z$  de 0 à  $\infty$  on obtient la distribution suivant  $r$  de la puissance injectée

$$p_{Hg}(r) = \int_0^\infty p(r, z) dz = \frac{I^2 B}{32\pi^2 r^2 \sqrt{\sigma \rho \nu}}. \quad (50)$$

En intégrant une fois encore entre  $R_i$  et  $R$  on obtient la puissance totale fournie au mercure

$$P_{Hg} = 2 \int_{R_i}^R p(r) dr = \frac{(1/R_i - 1/R)}{16\pi^2 \sqrt{\sigma \rho \nu}} I^2 B. \quad (51)$$

Le facteur 2 correspond à la contribution des deux couches de Hartmann. Pour  $R_i = 5.4 \cdot 10^{-2}$  m,  $R = 11 \cdot 10^{-2}$  m,  $\sigma = 1.05 \cdot 10^6 \Omega^{-1}m^{-1}$ ,  $\rho = 1.3 \cdot 10^4$  kg/m<sup>3</sup> et  $\nu = 10^{-7}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>,  $P_{Hg}$  s'écrit finalement

$$P_{Hg} = 1.6 \cdot 10^{-3} I^2 B. \quad (52)$$

La figure 2.15 compare les puissances mesurée et calculée. La puissance compensée  $P_{Hg} \times I^{-2} B^{-1}$  représentée en fonction du produit  $IB$  rend compte de la faible dispersion des points autour d'une droite d'équation  $P_{Hg} = C \times 10^{-3} \times I^2 B$ , dans laquelle la constante  $C$  est proche de  $1.4 \cdot 10^{-3}$ . Cette droite est globalement en dessous de la droite calculée de l'équation (52) (trait continu, figure 2.15.a).

La Puissance  $P_{Hg}$  mesurée et calculée est représentée en fonction de  $B$  pour différentes valeurs de  $I$  sur la figure 2.15.b. A faibles courants ( $I \leq 50$  A) l'équation 52 décrit assez bien l'évolution de la puissance fournie au mercure  $P_{Hg}$ , mais à courants plus forts elle semble la surestimer. En effet dans ce modèle la dissipation par effet Joule dans le mur extérieur ainsi que dans la partie des électrodes située entre le mercure et les résistances n'a pas été prise en compte, et pourrait expliquer l'écart entre les pentes expérimentale et théorique.

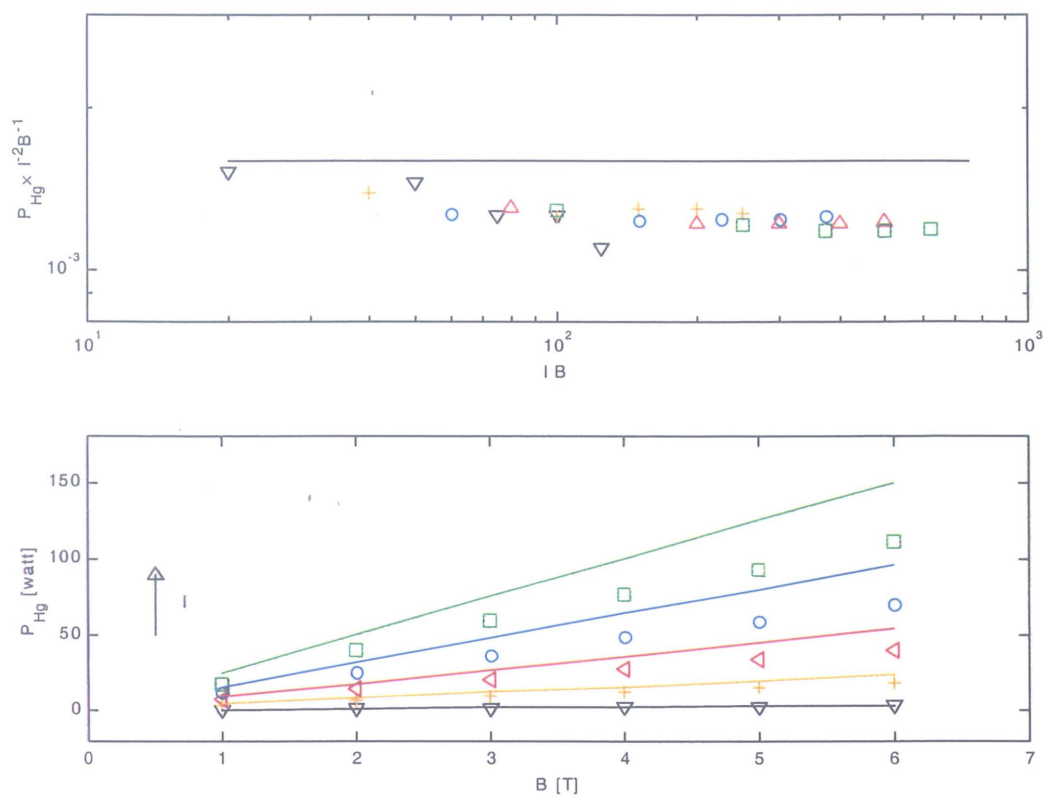


Figure 2.15 : Puissance fournie compensée  $P_{Hg} \times I^{-2} B^{-1}$  en fonction de  $IB$  suggérant la loi  $P_{Hg} = 1.4 \cdot 10^{-3} \times I^2 B$ . Comparaison avec le modèle (éq. 52)

## 2.6 Conclusions

Les différents éléments du dispositif expérimental sont décrits de façon détaillée dans ce chapitre.

Le forçage de l'écoulement est réalisé à l'aide d'un grand nombre de petites électrodes disposées sur un cercle dans la paroi inférieure. L'uniformité de ce forçage est assurée par des résistances électriques soudées aux électrodes ainsi que par un traitement de surface de ces dernières, permettant un très bon contact électrique avec le mercure.

Les vitesses sont déduites des mesures à la paroi des différences de potentiel électrique imposées par l'écoulement et le champ magnétique. Cette méthode découle des propriétés des écoulements MHD quasi-2D. Nous montrons par ailleurs que le signal de vitesse est très peu sensible au signal d'origine thermoélectrique. Une méthode complémentaire de mesure de vitesse par ultrasons est aussi proposée et permet une

investigation du champ de vitesse sur toute la hauteur de mercure.

Les mesures de températures par thermocouple Pt-Hg-Cu-Ni, peuvent être réalisées simultanément avec celles de la vitesse et pratiquement au même point. La technique de mesure utilisée permet d'obtenir des temps de réponse très petits par rapport à la technique classique de mesure par thermocouple, mais souffre de l'effet du champ électromoteur induit par la vitesse locale. Des précisions concernant ces mesures sont apportées au chapitre 5.

La puissance électrique injectée dans le système est calculée par un bilan global d'énergie. On montre par un bilan global d'énergie que la résistance électrique du mercure est bien indépendante du courant injecté et qu'elle varie linéairement avec le champ. Ceci confirme bien que l'épaisseur de la couche de Hartmann (dans laquelle tout le courant est confiné) varie en  $1/B$ . On montre aussi que la puissance électrique injectée dans le système varie en  $I^2 B$ . On peut s'attendre alors à un réchauffement du mercure par effet Joule *via* les couches de Hartmann. Pour des courant inférieurs à 50 A, l'élévation de la température du mercure est de l'ordre de  $20^\circ C$  pour un champ de 6 T (une grande partie du flux de chaleur injecté est évacuée par le mur extérieur). Les propriétés physiques du mercure telles que sa viscosité ou sa conductivité électrique ne varient dans ce cas que de quelques pourcents.

# Chapitre 3

## 3 L'écoulement moyen

### 3.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les principaux résultats expérimentaux concernant le champ de vitesse moyenne. Un modèle laminaire d'accélération de la couronne extérieure de mercure correspondant à la mise en régime de l'écoulement est proposé et comparé aux résultats expérimentaux. L'évolution spatiale de la couche cisailée turbulente est étudiée et la validité du modèle Sommeria-Moreau 1982 (SM-82) est discutée *via* le moment cinétique global.

### 3.2 Le régime transitoire

On se propose dans ce paragraphe de caractériser le champ de vitesse instationnaire correspondant à la mise en régime de l'écoulement (le courant électrique passant de 0 à une valeur donnée  $I$ ). La couronne extérieure de mercure initialement au repos, est mise en mouvement par la force de Laplace jusqu'à atteindre très rapidement un régime

établi. Durant cette phase d'accélération constante on peut, à partir des signaux de vitesse mesurés, distinguer trois zones différentes (figure 3.1) :

- Une première zone d'accélération en régime d'écoulement laminaire (zone 1) limitée à droite par un trait discontinu représentant l'instant où la transition entre le régime laminaire et turbulent s'effectue. Cette transition à la turbulence est le résultat de l'instabilité de la couche cisailée libre, dans laquelle le profil de vitesse moyenne présente un point d'inflexion.
- Une deuxième zone (zone 2), toujours en régime instationnaire, correspondant à la naissance et à l'interaction entre des structures tourbillonnaires de tailles relativement petites et donc à un transport de quantité de mouvement de la couronne extérieure ( $r > R_i$ ) vers la partie centrale de l'écoulement ( $r < R_i$ ).
- Enfin, une troisième zone correspondant à un écoulement quasi-stationnaire (zone 3) où l'on remarque que l'amplitude des oscillations du signal de vitesses est plus importante qu'en zone 2. Ces oscillations peuvent donner une idée sur la taille typique des plus grosses structures convectées par l'écoulement.

### 3.2.1 Modèle laminaire d'accélération de la couronne extérieure

L'évolution temporelle de la vitesse moyenne en régime instationnaire peut être prédite à l'aide d'un modèle laminaire simple. En supposant que le champ de vitesse et le courant électrique sont définis uniquement par  $U_\theta$  et  $j$ , la théorie laminaire de la couche de Hartmann permet d'écrire :

$$j(r, z, t) = j_{Ha}(r, t) \exp\left(-Ha \frac{z}{h}\right) + j(r, t), \quad (53)$$

$$U(r, z, t) = U_\theta(r, t) \left(1 - \exp\left(-Ha \frac{z}{h}\right)\right), \quad (54)$$

où  $U_\theta$  est la vitesse du cœur de l'écoulement,  $z$  la coordonnée parallèle à  $B$ ,  $j$  le courant dans le cœur et  $j_{Ha}(r, t)$  le courant dans les couches de Hartmann. La propriété de la couche de Hartmann permet de relier  $j_{Ha}(r, t)$  à la vitesse de cœur  $U_\theta$  à l'aide de la relation suivante :

$$j_{Ha}(r, t) = -\sigma B U_\theta(r, t). \quad (55)$$

Le courant électrique total  $I$  compris entre le cercle d'électrodes et le mur extérieur est donné par

$$I = 2\pi r h j(r, t) + 2\pi r h \frac{j_{Ha}(r, t)}{Ha}. \quad (56)$$

L'équation de Navier-stokes pour l'écoulement de cœur, dans laquelle les termes convectif et visqueux sont négligés se réduit à

$$\rho \frac{\partial U_\theta}{\partial t} = -j_c B. \quad (57)$$

Nous obtenons ainsi un système de cinq équations à cinq inconnues (53-57). Tenant compte de la condition initiale  $U_\theta(r, t = 0) = 0$ , la vitesse du cœur de l'écoulement  $U_\theta$  entre deux couches de Hartmann symétriques s'écrit alors :

$$U_\theta(r, t) = \frac{I}{4\pi r \sqrt{\sigma \rho \nu}} \left( 1 - \exp \left( -\frac{\nu Ha}{h^2} t \right) \right). \quad (58)$$

### 3.2.2 Comparaison avec les mesures

Deux signaux typiques de vitesse azimutale  $U_\theta(t)$  mesurés en deux rayons différents dans la couronne extérieure sont comparés avec la solution du modèle laminaire donnée par l'équation (58) pour les mêmes conditions ( $B = 4$  T et  $I = 0 : 15$  A, figure 3.1). La solution laminaire (trait continu), prédit assez bien l'accélération initiale de la couronne extérieure (pratiquement dans toute la zone 1), là où les effets non linéaires restent encore négligeables. Lorsque l'instabilité se développe (zone 2), la solution du modèle laminaire sous estime les vitesses mesurées, car les effets non linéaires deviennent importants et ne peuvent plus être négligés. L'écart relatif entre les mesures et la courbe théorique reste cependant faible (de l'ordre de 12%), et permet en première approximation de justifier l'emploi de l'équation (57) dans laquelle le courant  $j_c$  est issu de la théorie de la couche de Hartmann. Enfin, quand le terme exponentiel de l'équation (58) s'effondre (zone 3), on retrouve un assez bon accord entre la vitesse prédite par la théorie laminaire (§ 1.1.6) et les mesures (vitesses moyennes).



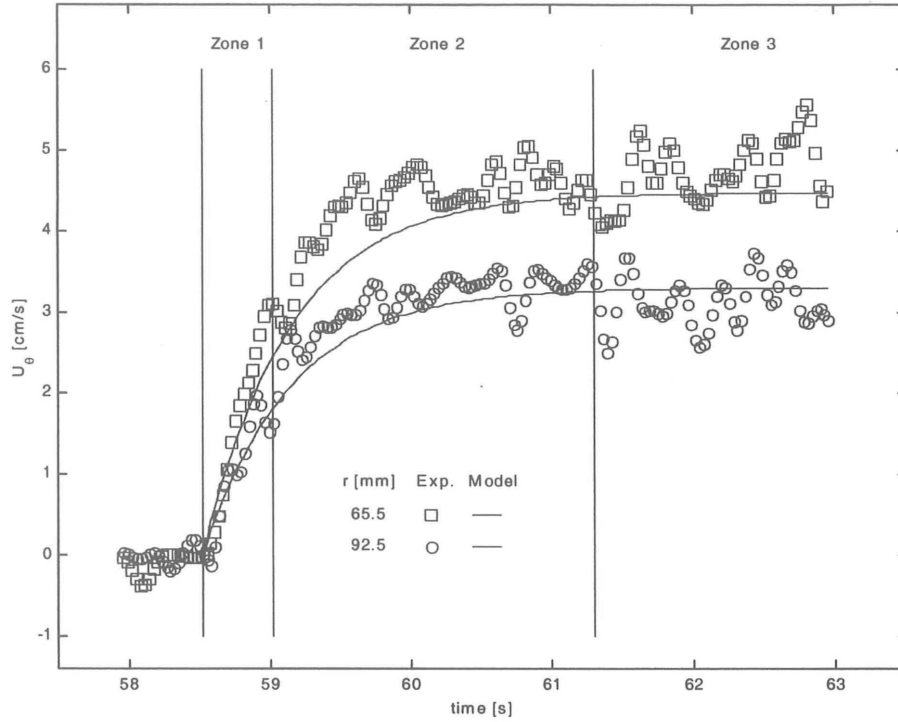


Figure 3.1 : Signaux de vitesses mesurés dans la couronne extérieure en régime transitoire : comparaison avec la solution du modèle laminaire éqt. (58).

### 3.2.3 Temps de mise en régime

Le temps nécessaire pour atteindre un régime quasi-stationnaire est de l'ordre de quelques secondes (2.7 s dans le cas présenté ici, voir figure 3.1). Nous pouvons, à partir de l'équation (58) trouver le temps nécessaire pour atteindre 95% de la valeur de la vitesse théorique. En effet il suffit de résoudre :

$$1 - 0.95 = \exp\left(-\frac{\nu Ha}{h^2}t\right), \quad (59)$$

ce qui pour  $Ha = 1200$ ,  $\nu = 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  et  $h = 0.01 \text{ m}$  conduit à un temps  $\tau = -\log(0.05)(0.01)^2/1200 \cdot 10^{-7} = 2.5 \text{ s}$ . Notons que ce temps de mise en régime est inversement proportionnel au nombre de Hartmann (et donc au champ  $B$ ). Les mesures réalisées pour plusieurs valeurs du champs et du courant final confirment bien cette loi  $\tau \sim \frac{1}{Ha}$ . Ce résultat découle simplement du fait que l'accélération du fluide ( $\partial U_\theta / \partial t$ ) est proportionnelle à la force appliquée ( $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ) et donc à  $B$ .

### 3.3 La couche cisailée libre

L'évolution de l'épaisseur de la couche cisailée libre ainsi que l'intensité turbulente (§ 4.2) sont deux informations importantes concernant les propriétés de transport de la turbulence (transport de quantité de mouvement et de scalaire passif). Après avoir défini l'épaisseur de la couche cisillée libre, on se propose d'en étudier l'évolution en fonction des deux paramètres  $Ha$  et  $Re$  afin de déterminer le paramètre adimensionnel qui contrôle l'épaisseur de cette couche. Les résultats concernant l'intensité de la turbulence ainsi qu'un modèle d'évolution de l'épaisseur de la couche cisailée (plus précisément de l'échelle intégrale) seront présentés au § 4.4.2.

Des distributions radiales de la vitesse moyenne azimutale mesurée en régime quasi-stationnaire sont présentées dans figure 3.2. À gauche sont présentés les résultats obtenus en utilisant le cercle central d'électrodes ( $R_{inj} = 54$  mm, figures 3.2.a et 3.2.c) et à droite le cercle extérieur d'électrodes ( $R_{inj} = 93$  mm, figures 3.2.b et 3.2.d). Les paramètres sont le courant  $I$  et le champ  $B$ . La turbulence générée par l'instabilité de la couche cisailée transporte une partie de la quantité de mouvement de l'anneau extérieur vers la région centrale. Ceci explique que les valeurs maximales de  $U_\theta$  soient en dessous de celles prédites par la théorie laminaire. Contrairement à la couche cisailée turbulente libre, on observe que la couche limite pariétale reste stable quelque soit la valeur du courant et du champ pour les deux cercles d'électrodes utilisé. On observe aussi (figures 3.2.b et 3.2.d) que la limite entre la couche cisailée libre associée au cercle extérieur d'électrodes et la couche limite pariétale semble être mal définie. Pour cette raison, nous nous limiterons à l'étude de la couche cisailée associée au cercle central d'électrodes ( $R_i = 54$  mm, figures 3.2.a et 3.2.c).

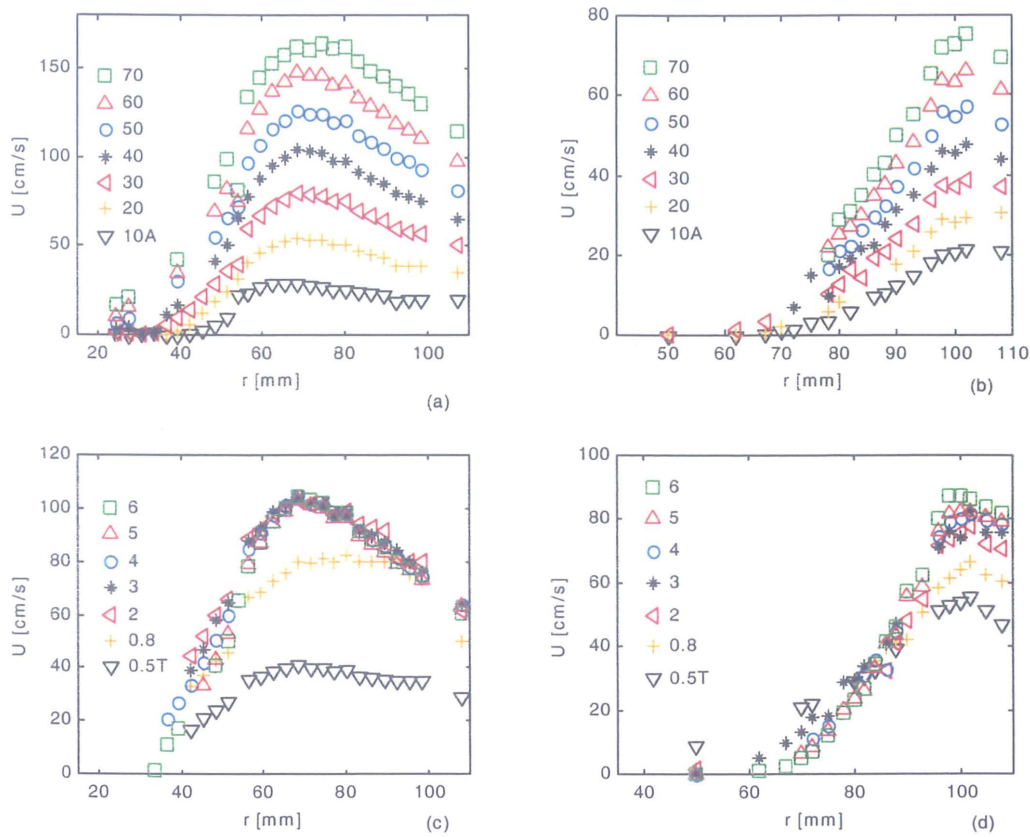


Figure 3.2 : Profils radiaux de la vitesse moyenne angulaire. (a)  $B = 5$  T et  $R_i = 54$  mm, (b)  $B = 5$  T et  $R_i = 93$  mm, (c)  $I = 40$  A et  $R_i = 54$  mm, (d)  $I = 40$  A et  $R_i = 93$  mm

### 3.3.1 Définition de l'épaisseur $\delta_{\parallel}$ de la couche cisailée

L'épaisseur de la couche cisailée libre  $\delta_{\parallel}$  est déterminée à partir des profils radiaux de la vitesse moyenne azimutale. On la définit comme étant la distance entre la projection du point d'intersection du profil prédit par la théorie laminaire et la droite de plus grande pente, et le point d'intersection de cette même droite avec l'axe des abscisses :

$$\delta_{\parallel} = \frac{\Delta U_{\theta}}{(dU_{\theta}/dr)_{max}}, \quad (60)$$

où  $\Delta U_{\theta} = U_{\theta max} - U_{\theta min}$ ,  $U_{\theta min} = 0$  et  $U_{\theta max}$  la valeur de la vitesse moyenne correspondant à l'intersection entre le profil prédit par la théorie laminaire et la droite de plus grande pente (figure 3.3).

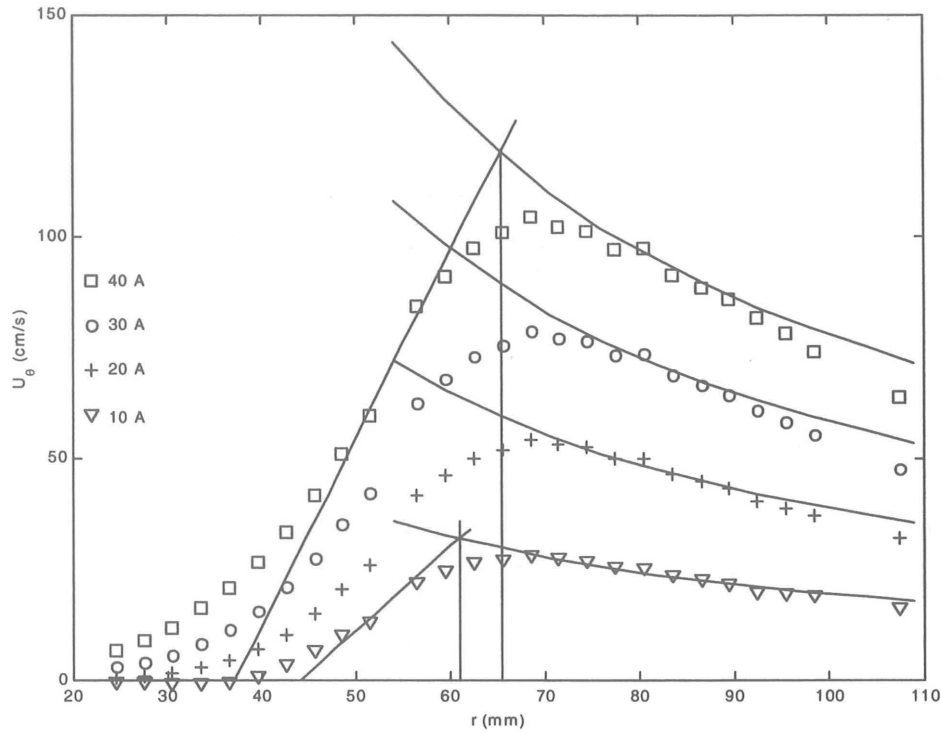


Figure 3.3 : Exemple de construction servant à définir l'épaisseur de la couche cisailée libre.  $B = 3$  T,  $R_i = 54$  mm et  $I = 10, 20, 30$  et  $40$  A.

### 3.3.2 Evolution de $\delta_{\parallel}$ en fonction de $Ha$ et $Re$

On trouve, à partir de constructions similaires à celle de la figure 3.3 réalisées pour tous les profils de  $U_{\theta}$ , que l'épaisseur adimensionnée de la couche cisailée libre  $\delta_{\parallel}/h$  dépend des deux paramètres  $Re$  et  $Ha$  et varie comme :

$$\delta_{\parallel}/h \simeq \left( \frac{Ha}{Re} \right)^{-1/2.3}, \quad (61)$$

où  $Re = \frac{U_{\theta \max} R}{\nu}$

Cette relation est très différente de celle prédite par la théorie laminaire  $\delta_{\parallel L}/h = Ha^{-1/2}$  pour laquelle le nombre de Reynolds n'intervient pas, et qui, dans la relation (61), exprime la propriété de la turbulence à élargir la région de mélange quand  $Re$  croît. L'accroissement de l'épaisseur  $\delta_{\parallel}$  de la couche est aussi contrôlée par la dissipation Joule dans les couches de Hartmann (exprimée dans la relation 61 par  $Ha$ ) qui tend

à limiter le flux d'énergie transféré vers les grandes échelles et par conséquent la taille des plus grosses structures cohérentes (voir § 4.4.2).

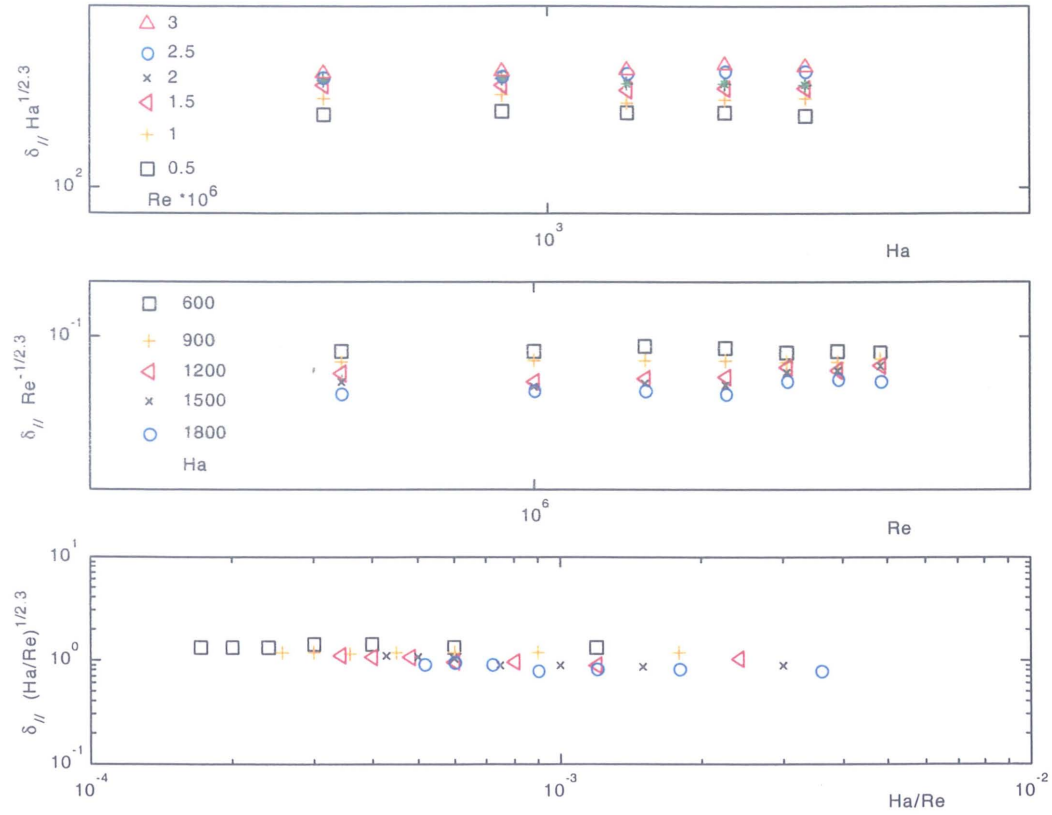


Figure 3.4 : Evolution de l'épaisseur de la couche cisailée libre  $\delta_{||}$  en représentation Log-Log. (a)  $\delta_{||} \times Ha^{1/2.3}$  en fonction de  $Ha$ , (b)  $\delta_{||} \times Re^{-1/2.3}$  en fonction de  $Re$  et (c)  $\delta_{||} \times \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{1/2.3}$ , suggérant la loi  $\delta_{||}/h \simeq 1 \times \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{-1/2.3}$

### 3.4 Le moment cinétique

Le moment cinétique  $L = \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^2 U_{\theta}(r) dr$  permet de quantifier d'une manière globale l'écoulement moyen. Il représente l'effet net du couple moteur  $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ , où  $\mathbf{F}$  est la force de Laplace appliquée à la couronne extérieure. Dans le cas simple d'un écoulement stationnaire sans inertie, ce moment cinétique s'écrit :

$$L = \frac{I}{4\pi\sqrt{\rho\sigma\nu}}(r_{max}^2 - r_{min}^2). \quad (62)$$

Cette relation exprime l'équilibre entre le couple moteur et le couple des forces dissipatives (dans les couches de Hartmann).  $r_{min}$  et  $r_{max}$  correspondent aux limites du domaine sur lequel les mesures de vitesses sont réalisées. On remarquera que dans cette relation, le moment cinétique  $L$  est indépendant du champ  $B$  et varie linéairement avec le courant injecté  $I$ .

### 3.4.1 Evolution du moment cinétique en fonction de $Ha$ et de $Re$

Le moment cinétique  $L$  est obtenu à partir des profils moyens de la vitesse azimutale. Pour chaque couple  $(I, B)$  on évalue l'intégrale  $\int_{r_{min}}^{r_{max}} r^2 U_\theta(r) dr$  à l'aide de la méthode des trapèzes. On représente ensuite sur un même graphique, pour chaque valeur du champ magnétique  $B$ , l'évolution du moment cinétique  $L$  en fonction du courant  $I$ . Ces profils sont alors comparés avec la droite (trait plein) représentant la loi théorique  $L(I)$  et qui correspond à la solution du modèle SM82 (62) (figure 3.5). Pour des valeurs faibles du courant injecté ( $I \lesssim 20$  A ou  $Re \lesssim 10^6$ ) les points expérimentaux se superposent sur la droite théorique quelque soit la valeur du champ  $B$ . Maintenant, pour des valeurs de courant plus grandes, on distingue deux régions :

Une région correspondant à des champs magnétiques inférieurs à 2 T ( $Ha < 900$ ), pour lesquels on observe une forte saturation du moment cinétique (jusqu'à 50% de la valeur théorique pour  $I = 100$  A). On explique cette saturation comme étant le résultat d'effets faiblement 3-D persistants à faibles valeurs du champ, et plus particulièrement à un effet de pompage d'Ekman présent à l'échelle des tourbillons et à l'échelle de la cellule. Cet écoulement méridional transporte une fraction du moment cinétique vers la couche limite pariétale, où elle y est dissipée par viscosité.

Pour des champs magnétiques supérieurs à 2 T ( $Ha \geq 900$ ), les courbes de moment cinétique tendent vers une seule droite. La pente de cette droite qui est indépendante du champ  $B$  reste néanmoins plus faible que la pente de la droite théorique. Nous attribuons cette différence de pente, qui est de l'ordre de 15%, à la fraction conductrice de la paroi inférieure de la cellule (électrodes et sondes) dont l'aire totale représente environ 5% de l'aire de la paroi inférieure. Cette fraction de surface conductrice induit une dissipation supplémentaire par effet Joule, localisée dans les couches de Hartmann.



Le rapport du temps de freinage modifié  $\tau_H^*$  au temps de freinage sans fraction conductrice  $\tau_H$  est proportionnel au rapport des conductivités  $C_w = \frac{\sigma_w h_w}{\sigma h} \cdot S_{cw}$  ( $\sigma_w$  et  $\sigma$  sont les conductivités du cuivre et du mercure,  $h_w$  la longueur d'insertion de l'électrode dans la paroi,  $h$  l'épaisseur de la couche de mercure et  $S_{cw}$  la fraction de surface conductrice). Nous trouvons que ce rapport de conductivités est de l'ordre de 10% et pourrait expliquer la différence entre les pentes théorique et expérimentale.

**Remarque :** Le caractère bidimensionnel de l'écoulement est bien confirmé à partir du moment où la variation du moment cinétique devient indépendante de  $B$  et linéaire en  $I$ , ce que nous observons pour des champs supérieurs à 2 T.

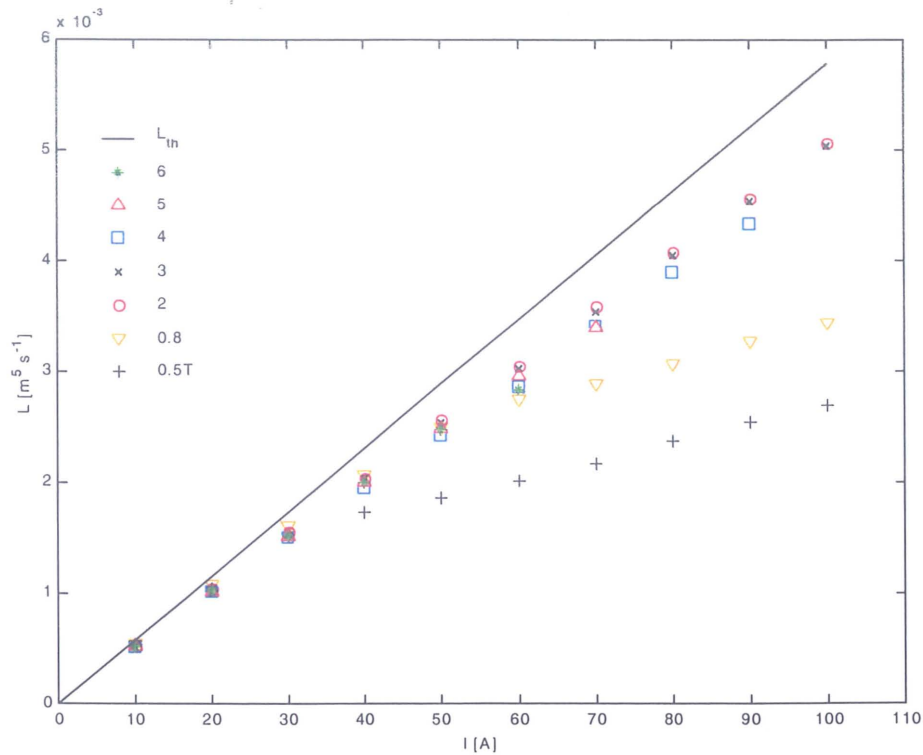


Figure 3.5 : Evolution du moment cinétique  $L$  en fonction du courant injecté  $I$  pour différents champs magnétiques  $B$ .

### 3.4.2 Bidimensionalité de l'écoulement de cœur

Des profils moyens de vitesse angulaire mesurés à l'aide du vélocimètre ultrasons à différentes côtes  $z$  tels que ceux présentés sur la figure 3.6, ont été obtenus pour des valeurs modérées du champ et du courant injecté. Ils correspondent à des vitesses

moyennes azimutales mesurées dans la couche cisailée à un rayon  $R = 70$  mm. La précision de la mesure à cette distance ( $x_{dop} = 55$  mm), où la divergence du champ acoustique reste encore faible, est de l'ordre de 5 % (valeur donnée par le constructeur). L'écart relatif maximum de la vitesse pour un profil donné est lui aussi de quelques pour-cents (entre 4 et 6 %) même à faible champs (0.085 T). L'écoulement de cœur peut alors être considéré comme quasi-bidimensionnel.

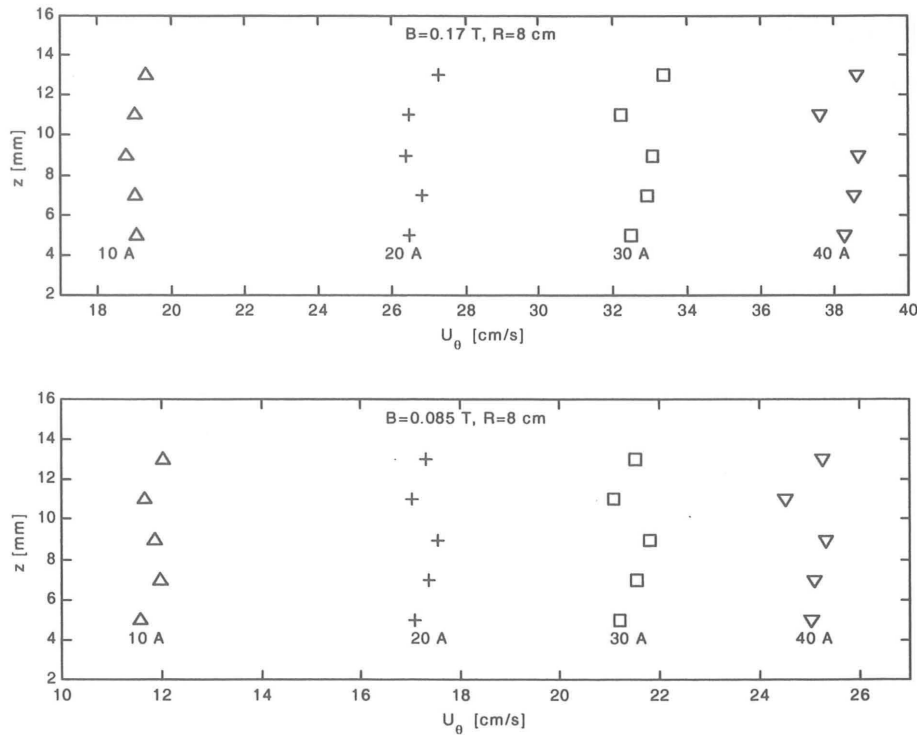


Figure 3.6 : Profils verticaux de la vitesse azimutale.

### 3.5 Conclusions

Ce chapitre est principalement dédié à l'étude du champ moyen de vitesse en régime quasi-stationnaire et à l'évolution spatiale de la couche cisailée turbulente. La mise en régime de l'écoulement y est abordée en tout début.

Comme le montrent les signaux de vitesse azimutale en régime instationnaire, l'accélération de la couronne extérieure correspond principalement à deux phases, l'une linéaire, pendant laquelle les effets inertiels sont négligeables (zone 1), et l'autre où les termes non-linéaires deviennent du même ordre que la force de Laplace. Rappelons



que le temps d'établissement du régime quasi-stationnaire varie en  $1/Ha$  et découle simplement du fait que l'accélération  $\partial U_\theta / \partial t$  est proportionnelle à la force appliquée ( $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ) et donc à  $Ha$ .

L'évolution de l'épaisseur de la couche cisailée libre associée au cercle d'électrode central est étudiée. Cette épaisseur que nous avons définie par rapport au profil théorique est contrôlée par le nombre  $Ha/Re$  et varie comme  $\delta_\parallel \simeq h \left( \frac{Ha}{Re} \right)^{-1/2.3}$ . Nous montrerons dans le chapitre 5 qu'une telle loi peut être retrouvée, simplement en écrivant l'équilibre entre les effets inertiels et la dissipation par effet Joule dans les couches de Hartmann.

Les profils du moment cinétique ont montré un très bon accord avec la solution laminaire pour des faibles valeurs du courant ( $I \lesssim 20$  A ou  $Re \lesssim 10^6$ ). Les effets 3D, plus importants à forts régimes d'écoulement persistent pour des faibles valeurs du champ magnétique ( $B < 2$  T ou  $Ha < 900$ ). Pour des valeurs plus importantes de ce champ, ces effets 3D sont freinés et l'écoulement de cœur peut être considéré comme quasi-bidimensionnel.

Les mesures ultrasons réalisées à faibles nombres de  $Ha$  ( $B < 0.085$  T) et  $Re$  ( $I \leq 40$  A) montrent que l'écart relatif maximum de la vitesse entre deux plans transverses et de l'ordre de 6% et confirment ainsi la quasi-bidimensionalité de l'écoulement.

# Chapitre 4

## 4 Propriétés de la turbulence

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux résultats concernant le champ de vitesse fluctuant. Nous montrons dans un premier temps que l'écoulement étudié est bien turbulent et que cette turbulence persiste même à grands nombres de Hartmann. L'analyse spectrale de la vitesse associée à des inter-corrélations triples en deux points permet de confirmer la présence d'une cascade inverse d'énergie vers des échelles de plus en plus grandes. Les propriétés singulières des structures cohérentes alimentées par cette cascade, en particulier, leur taille caractéristique, leur vitesse de transit et leur nombre sont également analysées dans ce chapitre. Enfin, nous proposons un modèle élémentaire qui prédit une loi d'évolution de l'échelle intégrale.

## 4.2 L'intensité turbulente

Elle est caractérisée à chaque instant par le rapport entre l'amplitude de la fluctuation du signal de vitesse ( $u' = u - \langle u \rangle$ ) sur sa moyenne temporelle ( $\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt$ ). Pour une séquence temporelle donnée, l'intensité turbulente du signal de vitesse est caractérisée par la valeur de son écart type  $\langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  (communément appelée RMS, Root Mean Square) rapportée à sa moyenne. La figure 4.1 présente des distributions radiales de RMS des signaux de vitesse azimutale (a et c) et radiale (b et d) calculées pour deux valeurs de champ magnétique et pour différentes valeurs du courant électrique. L'évolution spatiale (suivant  $r$ ) de la RMS de  $u_\theta$ , en forme de cloche, est très différente de celle de  $u_r$  qui présente une branche pratiquement linéaire. Ces profils atteignent leur maximum à la même position radiale ( $R \simeq 58$  mm) dans la couche cisailée. Les valeurs des RMS hors de la couche cisailée libre, prises dans la zone proche du centre ( $R \leq 40$  mm) sont globalement supérieures à celles correspondant à la couronne extérieure ( $75 \leq R \leq 110$  mm). En effet, dans cette zone, le faible taux de turbulence de la composante azimutale de la vitesse ( $\langle (u_\theta - \langle u_\theta \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle u_\theta \rangle$ ) s'explique par l'absence de forts cisaillements (excepté près de la paroi) et la présence d'un forçage quasi-stationnaire de l'écoulement. Les valeurs maximales des RMS de la vitesse azimutale rapportées à la vitesse moyenne locale conduisent à un taux de turbulence variant entre 15 et 20%.

## 4.3 L'analyse spectrale

Les spectres d'énergie cinétique (ou PSD pour *Power Spectral Density*) des fluctuations de vitesse azimutale  $u'_\theta = u_\theta - \langle u_\theta \rangle$  (où  $\langle u_\theta \rangle$  désigne la moyenne temporelle du signal  $u_\theta$ ) sont calculés soit à partir des signaux temporels pour donner des spectres en fréquence soit à partir de signaux spatiaux reconstitués pour une représentation dans l'espace des nombres d'onde. L'hypothèse de Taylor est utilisée pour reconstituer le signal spatial  $u_\theta(x)$  à partir du signal temporel  $u_\theta(t)$  en prenant non pas une vitesse moyenne mais la vitesse instantannée de l'écoulement ( $x = u_\theta(t) \times t$ ). Il est alors évident que le pas  $\Delta x$  du signal spatial, n'est plus constant et qu'une interpolation de

ce dernier s'impose afin de pouvoir calculer les spectres spatiaux d'énergie (figures 4.2). On vérifie bien entendu que cette interpolation n'entraîne pas d'erreurs dans le calcul des spectres plus particulièrement si l'on s'intéresse à la pente de la zone inertielle du spectre. La figure (4.3) montre deux spectres typiques d'énergie compensés, l'un temporel ( $f^3 \times E(f)$ ) et l'autre spatial ( $k^3 \times E(k)$ ) calculés dans les mêmes conditions et présentant tout deux la même pente dans leur zone inertielle.

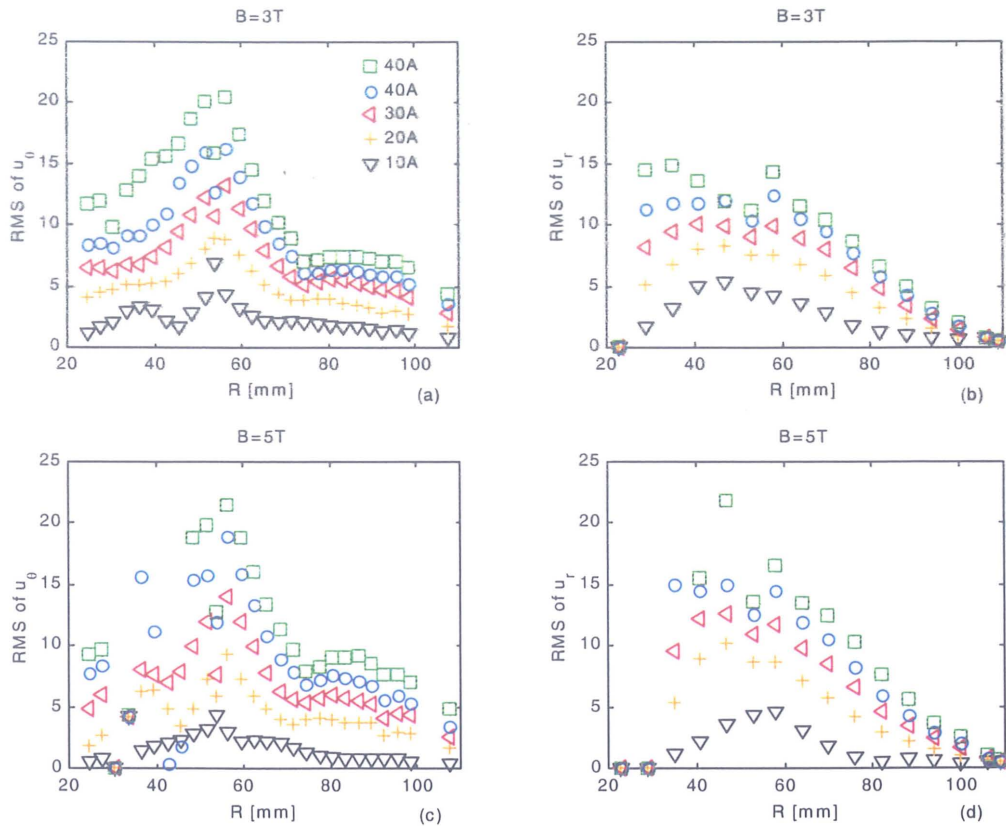


Figure 4.1 : Distributions radiales des RMS. (a et b)  $B = 3$  T, (c et d)  $B = 5$  T.

$$R_i = 54 \text{ mm.}$$

#### 4.3.1 Spectres de vitesses

Les spectres d'énergie cinétique calculés pour  $B$  et  $I$  variant respectivement de 0.5 à 6 T et de 10 à 60 A, montrent tous la présence de pics à faible fréquence (ou à faibles nombres d'ondes), signature de l'existence de grosses structures dans l'écoulement de base (figure 4.4) suivis d'une zone inertielle en  $k^{-n}$ . Les propriétés de ces structures seront décrites ultérieurement (§ 4.4). La zone inertielle s'étend sur moins d'une décade

de nombres d'ondes ( $k_\ell \simeq 0.1 \text{ cm}^{-1} \lesssim k \lesssim k_i \simeq 1 \text{ cm}^{-1}$ ) et met en évidence des lois en  $k^{-5/3}$  et  $k^{-3}$ . La figure (4.5) montre un exemple typique de spectres d'énergie compensés  $k^3 E(k)$  en représentation log-log avec des zones inertielles de pentes  $-5/3$  et  $-3$ .

La pente cette zone inertielle est déterminée à la fois par la dissipation Joule dans les couches de Hartmann et les transferts inertiels dans le cœur de l'écoulement. On observe des spectres en  $k^{-5/3}$  pour de faibles valeurs de  $B$  et  $I$  (typiquement pour  $B \leq 0.5 \text{ T}$  et  $I \leq 20 \text{ A}$ ). Ceci qui correspond à une dissipation suffisamment faible pour que le flux d'énergie  $\varepsilon$ , vers les grandes échelles, reste relativement constant. On est alors dans le cas d'une turbulence 2D forcée sans dissipation, dans laquelle l'énergie est transférée de l'échelle d'injection, vers des échelles de plus en plus grandes (cascade inverse d'énergie). En effet, une éventuelle cascade d'énergie vers les petites échelles est interdite par la conservation de l'enstrophie. Plus précisément, un transfert, même faible, d'énergie vers les grands nombres d'ondes, doit s'accompagner d'un transfert inverse beaucoup plus important vers les petits nombres d'onde, afin que l'enstrophie totale  $\int_0^\infty k^2 E(k)$  ne croisse pas. L'enstrophie injectée, quant à elle, est transférée de l'échelle d'injection vers les plus petites échelles (figure 4.6). Kraichnan (1967) a montré que les transferts d'énergie et d'enstrophie se font de manière exclusive c'est-à-dire la cascade d'énergie doit s'accompagner d'un transfert d'enstrophie nul et inversement, les transferts d'énergie sont nuls dans la cascade d'enstrophie.

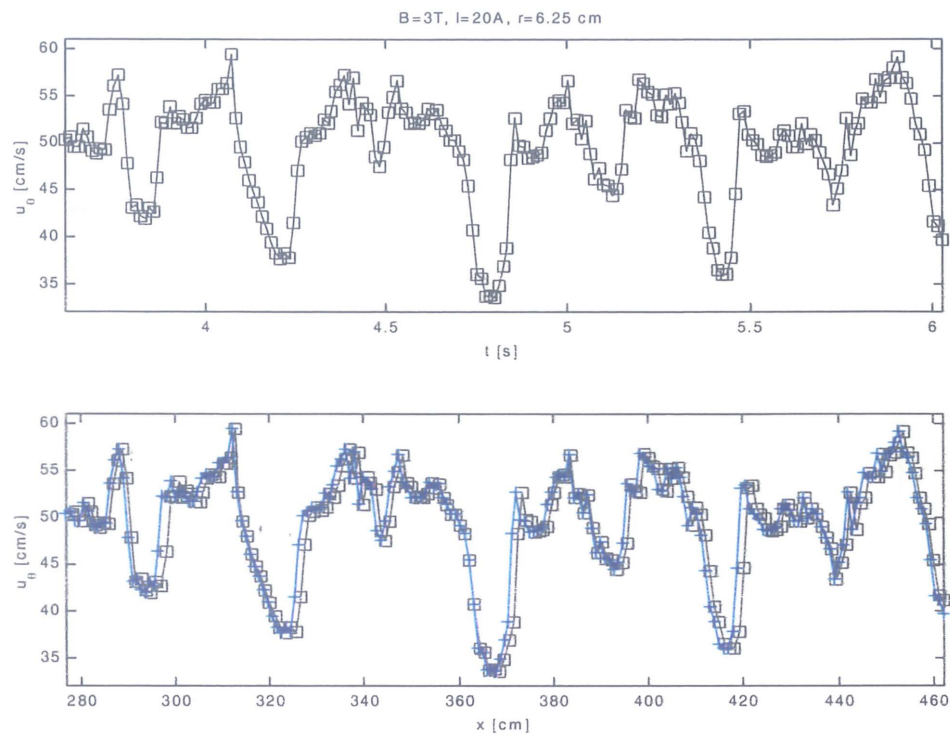


Figure 4.2 : Exemple d'interpolation d'un signal spatial  $u_\theta(x)$  déduit d'un signal temporel  $u_\theta$ .

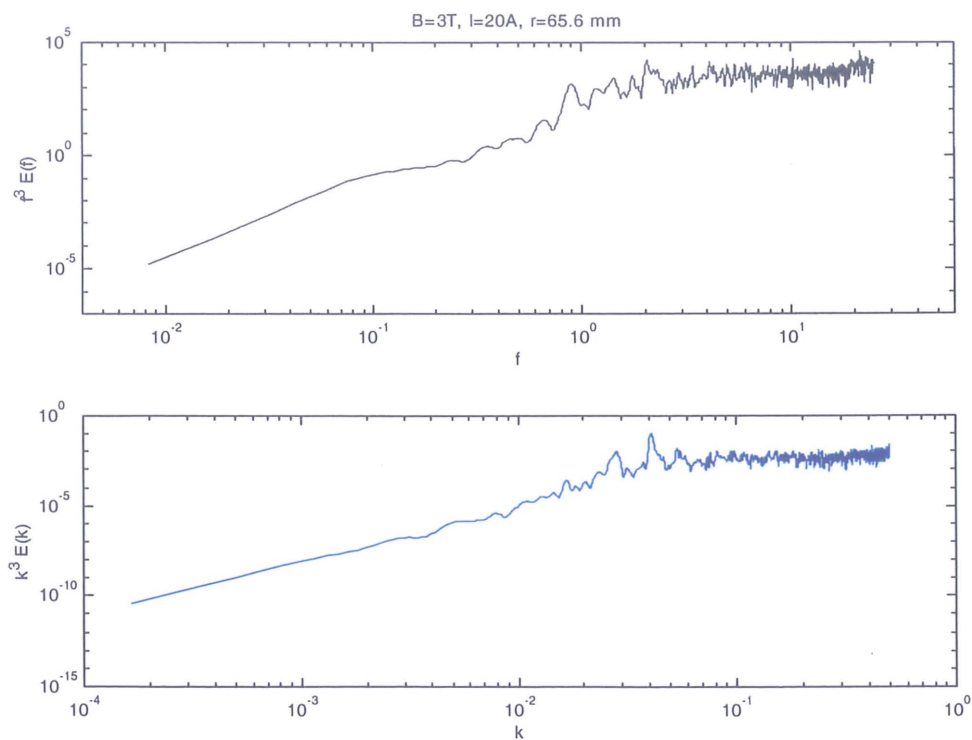


Figure 4.3 : Spectre spatial et spectre temporel calculés à partir des signaux ci-dessus.

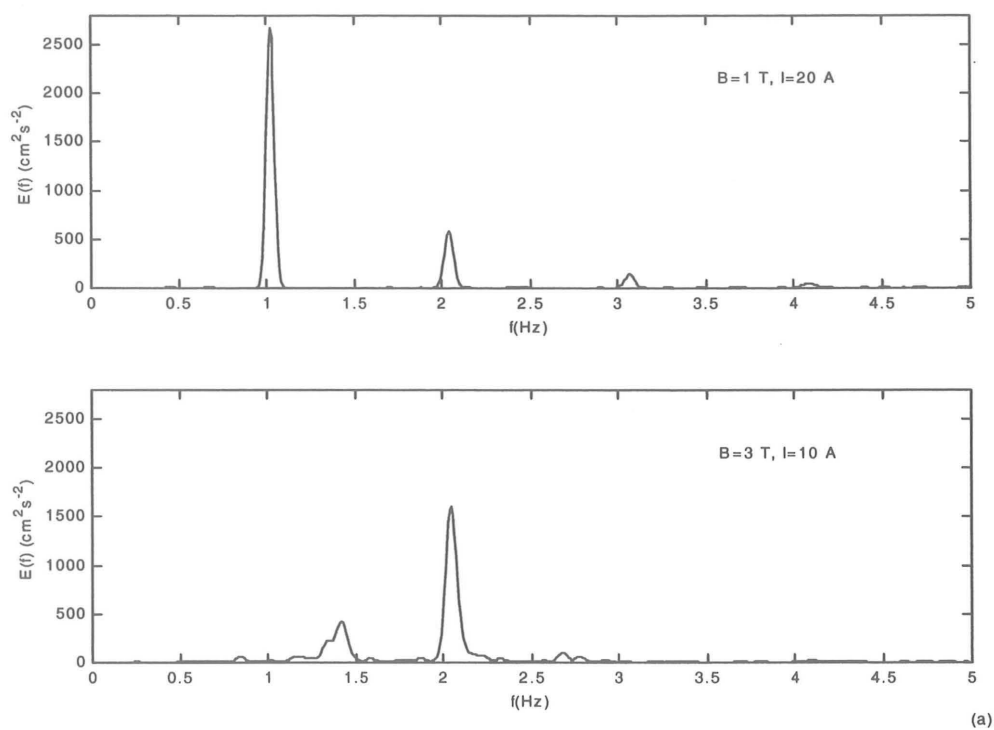


Figure 4.4 : Spectres temporels linéaires de  $u'_\theta$  à  $r \simeq 68.5$  mm. Les pics à basse fréquence sont la signature de structures cohérentes.

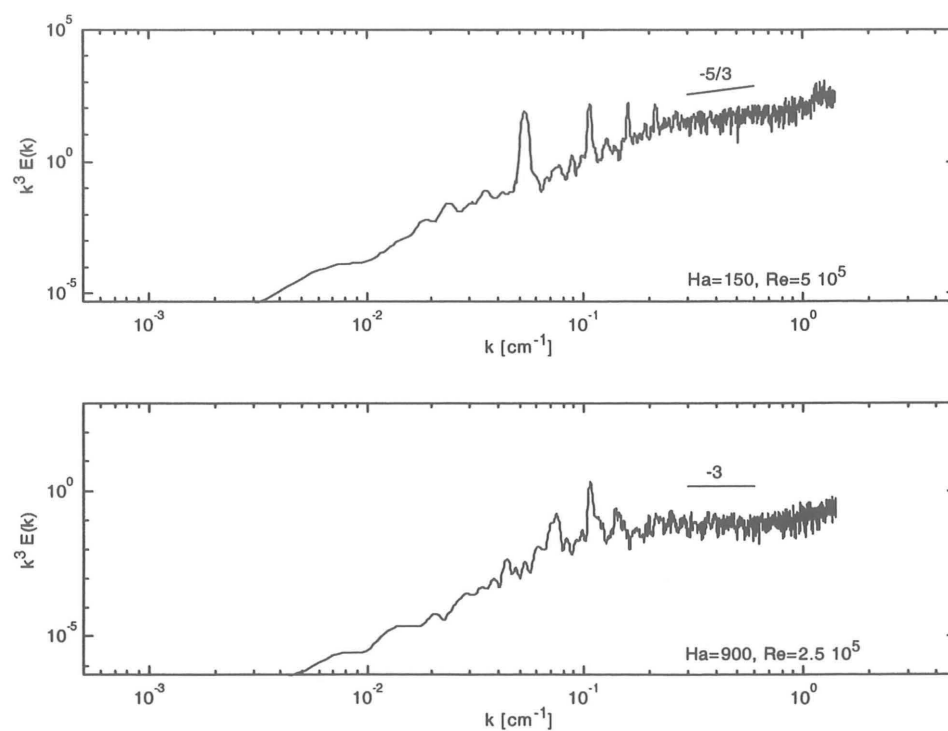


Figure 4.5 : Spectres spatiaux log-log compensés,  $k^3 E(k)$  calculés dans les mêmes

conditions que la figure 4.4 montrant des lois en  $k^{-5/3}$  et  $k^{-3}$ .

Maintenant, pour des valeurs plus importantes de  $B$  et  $I$ , les spectres d'énergie présentent une loi en  $k^{-3}$ . Deux explications possibles peuvent être associées à cette loi en  $k^{-3}$ . La première est celle de la cascade directe d'enstrophie et la seconde celle de la cascade inverse d'énergie avec dissipation. Les calculs du spectre de transfert (§ 4.3.3) montrent clairement que le transfert d'énergie cinétique se fait de l'échelle d'injection vers des échelles de plus en plus grandes excluant ainsi l'hypothèse de la cascade d'enstrophie dans cette zone. L'explication de l'exposant  $-3$  vient de l'équilibre entre les transferts inertiels (caractérisés par le temps  $\tau_{tu} \sim (k^3 E(k))^{-1/2}$ ) et la dissipation dans les couches de Hartmann (carctérisée par le temps  $\tau_H$  indépendant du nombre d'onde  $k$ ). L'égalité entre ces deux temps conduit à un spectre en  $k^{-3}$  (voir détails § 4.4.2).

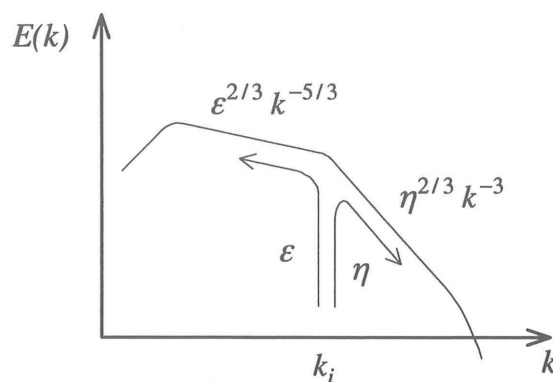


Figure 4.6 : Spectre d'énergie schématique d'une turbulence 2D forcée où l'énergie et l'enstrophie sont injectées à un nombre d'onde  $k_i$  aux taux  $\varepsilon$  et  $\eta$ .

### 4.3.2 Transferts d'énergie dans l'espace de Fourier

Ce paragraphe résume les principales étapes de calcul conduisant à exprimer le transfert global d'énergie cinétique entre les différentes échelles d'une turbulence MHD quasi-2D isotrope et homogène. La cinématique de la turbulence homogène isotrope tridimensionnelle, décrite dans un grand nombre d'ouvrages devenus classiques : *Batchelor (1953)*, *Hinze (1959)*, *Lesieur (1998)* diffère peu du cas bidimensionnel au sens



où les grandeurs conservées sont différentes (comme l'enstrophie). La démarche reste cependant identique.

**Equations du mouvement :** Les équations du mouvement mises sous forme adimensionnelle s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\tau_H} \mathbf{u}. \quad (63)$$

Ces équations sont écrites dans l'espace de Fourier puis projetées sur un plan  $\pi$  orthogonal au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , afin d'en éliminer le terme de pression. Tous les autres termes, exceptés les termes inertiels, sont parallèles à  $\pi$ , ce qui donne :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{Re} + \frac{1}{\tau_H} \right) \hat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{k}, t) = -ik_j P_{il}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_l(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}, \quad (64)$$

$$\text{avec : } (proj [T.F. (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}])_i = -ik_j P_{il}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_l(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p},$$

où  $P_{il}(\mathbf{k}) a_l = (\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2}) a_l = (proj [\mathbf{a}])_i$  représente la projection de la composante  $a_i$  du vecteur  $\mathbf{a}$  sur un plan orthogonal à  $\mathbf{k}$ .

$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = (1/2\pi)^2 \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$  est la transformée de Fourier, T.F.  $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]$ , du vecteur  $\mathbf{u}$ .

**Equation de l'énergie dans l'espace de Fourier :** Ces équations s'obtiennent en écrivant les équations précédentes pour les nombres d'ondes  $\mathbf{k}$  et  $-\mathbf{k}$  :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{Re} + \frac{1}{\tau_H} \right) \hat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{k}, t) = -ik_j P_{il}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_l(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}, \quad (65)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{Re} + \frac{1}{\tau_H} \right) \hat{\mathbf{u}}_i(-\mathbf{k}, t) = -ik_j P_{il}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=-\mathbf{k}} \hat{u}_l(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}. \quad (66)$$

La combinaison des équations (65) et (66) donne :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2k^2}{Re} + \frac{2}{\tau_H} \right) \hat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{k}, t) \hat{\mathbf{u}}_i(-\mathbf{k}, t) =$$

$$\begin{aligned}
& -ik_j P_{il}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) \hat{u}_l(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \\
& + ik_j P_{il}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_l(-\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} \\
& = ik_j P_{il}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_l^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p} - \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_l(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}. \quad (67)
\end{aligned}$$

Le symbole "''\*" indique le complexe conjugué. L'hypothèse d'incompressibilité permet de simplifier le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2k^2}{Re} + \frac{2}{\tau_H} \right) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) = \\
& ik_j \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{q}, t) - \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}. \quad (68)
\end{aligned}$$

On effectue alors une moyenne d'ensemble (notée  $\langle \rangle$ ) et on introduit le tenseur énergie spectral bi-dimensionnel,

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{k}, t) \rangle = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{k}, t) \rangle \quad (69)$$

et le bi-spectre bi-dimensionnel,

$$B_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}'', t) \hat{u}_j(\mathbf{k}', t) \hat{u}_m(\mathbf{k}, t) \rangle \quad (70)$$

avec  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{0}$ .

On identifie les différents termes :

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t) \rangle = \Phi_{ii}(\mathbf{k})$$

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(-\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{k} + \mathbf{q}, t) \rangle = B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})$$

$$\langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(-\mathbf{p}, t) \hat{u}_j^*(-\mathbf{k} + \mathbf{q}, t) \rangle = B_{jii}^*(\mathbf{k}, -\mathbf{p})$$

et on obtient

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2k^2}{Re} + \frac{2}{\tau_H} \right) \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = -2k_j \int \text{Im}[B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})] d\mathbf{p}. \quad (71)$$

On pose  $T(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = -2k_j \text{Im}[B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})]$ . L'équation de l'énergie dans l'espace de Fourier s'écrit alors :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2k^2}{Re} + \frac{2}{\tau_H} \right) \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \int T(\mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (72)$$

Le terme  $T(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  représente le transfert d'énergie dans l'espace des vecteurs d'ondes, depuis l'élément de volume  $d\mathbf{p}$  vers l'élément  $d\mathbf{k}$  (*Batchelor 1953, p85*). Ce terme qui fait intervenir des corrélations triples en deux points de vitesses correspond au terme non linéaire dans les équations de Navier-Stokes. Il ne peut ni créer ni détruire de l'énergie, il ne peut que la déplacer d'un nombre d'onde à un autre dans l'espace de Fourier.

#### • Turbulence homogène isotrope

Si la turbulence est homogène on peut déduire le tenseur spectral d'énergie du tenseur des corrélations dans l'espace physique par :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-2} \int R_{ij}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (73)$$

où  $R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$ . La relation est similaire pour les moments d'ordre 3

$$B_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t) = (2\pi)^{-4} \int R_{ijm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (74)$$

où  $R_{ijm}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}', t) \rangle$ . La symétrie introduite par l'hypothèse d'isotropie réduit le nombre de paramètres caractérisant les corrélations (*Batchelor 1953*). Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = P_{ij}(\mathbf{k}) \Phi_{nn}(\mathbf{k}, t) = P_{ij}(\mathbf{k}) \frac{E(k, t)}{\pi k}, \quad (75)$$

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \mu_k \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{nn}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \pi k \Phi_{nn}(\mathbf{k}, t), \quad (76)$$

où  $E(k, t)$  est la densité d'énergie cinétique au nombre d'onde  $k$  appelé aussi spectre d'énergie cinétique.

Le terme important dans l'équation (71) qui fait intervenir les corrélations triples est le terme  $B_{jii}(\mathbf{k}, -\mathbf{p})$ . On montre que l'isotropie permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^2 B_{jii}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t) = A_j(k, \mu_k, k') [(k'^2 - k k' \mu_k) k_j - (k^2 - k k' \mu_k) k'_j], \quad (77)$$

où  $\mu_k = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{kk'}$ . Les transferts détaillés  $T(k, p)$  entre les nombres d'ondes  $k$  et  $p$  peuvent alors se mettre sous la forme :

$$T(k, p) = \int_{|\mathbf{k}|=k} \int_{|\mathbf{p}|=p} T(\mathbf{k}, -\mathbf{p}) d\mathbf{k} d\mathbf{p}, \quad (78)$$

$$T(k, p) = 2i (\pi k p)^2 \int_{-1}^1 A_j(k, \mu_k, p) (1 - \mu_k^2) d\mu_k. \quad (79)$$

**Calcul pratique du spectre de transfert** Les mesures de vitesse radiale et azimutale effectuées le long d'un rayon dans l'expérience MATUR nous permettent de calculer le spectre de transfert d'énergie entre les différents modes. Le transfert net d'énergie,  $T(k) = \int_0^\infty T(k, p) dp$  est obtenu à partir des corrélations triples en deux points des vitesses. Les conditions d'isotropie font que le tenseur des corrélations triples s'exprime avec les trois fonctions (Nguyen Duc, 1984) :

$$K(r) = \langle u_r(x, 0, t) u_r(x, 0, t) u_r(x + r, 0, t) \rangle, \quad (80)$$

$$H(r) = \langle u_\theta(x, 0, t) u_\theta(x, 0, t) u_r(x + r, 0, t) \rangle, \quad (81)$$

$$Q(r) = \langle u_r(x, 0, t) u_r(x, 0, t) u_\theta(x + r, 0, t) \rangle. \quad (82)$$

Ces trois quantités peuvent être reliées entre elles grâce à la condition d'incompressibilité par les relations :

$$H(r) = -K(r), \quad (83)$$

$$Q(r) = -\frac{1}{2} \left[ r \frac{dH(r)}{dr} + H(r) \right] = \frac{1}{2} \left[ r \frac{dK(r)}{dr} + K(r) \right]. \quad (84)$$

Le spectre de transfert d'énergie  $T(k, t)$  peut s'exprimer uniquement en fonction des corrélations en deux points longitudinales  $K(r)$  :

$$T(k) = \pi k T(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{4} \int_0^\infty K(r) r [k r J_0(kr) - 2J_1(kr)] dr, \quad (85)$$

où  $J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel de première espèce.

#### 4.3.3 Résultats expérimentaux

La figure 4.7 montre un calcul typique de spectre de transfert  $T(k)$  associée au spectre d'énergie cinétique  $E(k)$  obtenus pour  $B = 0.5$  T et  $I = 10$  A. Cet exemple illustre la présence d'un mécanisme de cascade inverse dans la zone inertielle. L'énergie est prélevée dans la zone des nombres d'ondes où  $T(k) < 0$  pour être injectée aux nombres d'onde plus petits tel que  $T(k) > 0$ .

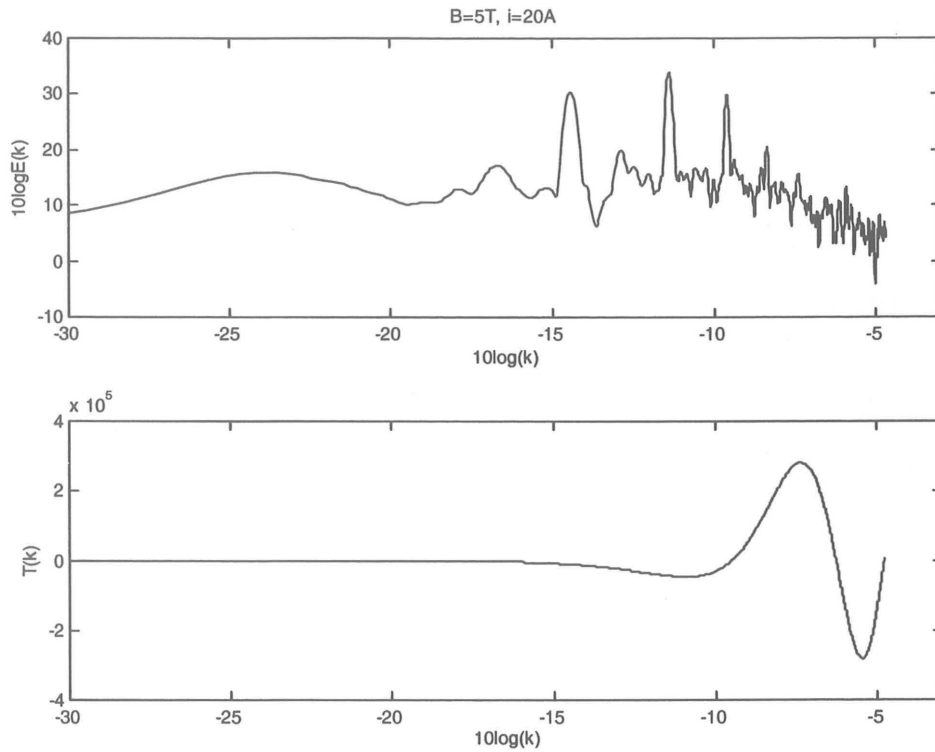


Figure 4.7 : Exemple de spectre de transfert  $T(k)$  et spectre d'énergie associé  $E(k)$ .

**Remarque** La partie négative de la fonction  $T(k)$  observée aux petits nombres d'ondes ( $1/l \geq 0.1 \text{ cm}^{-1}$  ou  $l \geq 10 \text{ cm}$ ), pourrait correspondre à une redistribution directe de l'énergie résultant d'un phénomène de condensation (quand les plus grosses structures atteignent la taille du domaine). On montre plus loin (§ 4.4.1) que l'échelle intégrale de l'écoulement est de l'ordre de 4 cm, bien inférieure à la taille de la cellule ( $R=11 \text{ cm}$ ), ce qui semble exclure tout phénomène de condensation. Cette échelle intégrale est en bon accord avec la taille des plus grosses structures observées après reconstitution du champ de vorticité (§ 4.4.4), ou encore avec l'épaisseur de la couche cisailée libre  $\delta_{\parallel}$  (§ 3.3.2). Les calculs d'intercorrélations triples ayant été fait sur une distance maximum de 9 cm, nous pensons que cette partie négative de la fonction  $T(k)$  n'a pas vraiment de sens physique.

## 4.4 Propriétés des structures cohérentes

Il est maintenant bien établi que l'énergie injectée dans le système est transférée vers des échelles de plus en plus grandes conduisant à un nombre quasi stationnaire de structures cohérentes. Ce paragraphe a pour but d'étudier l'effet des deux nombres  $Ha$  et  $Re$  sur la vitesse de transit de ces structures, sur leur nombre ainsi que sur leur taille caractéristique.

L'observation directe des structures tourbillonnaires, est possible sous  $B$  et  $I$  modérés grâce à la visualisation de la déformation de l'image d'une grille projetée sur la surface libre du mercure. Elle montre que l'instabilité initiale de la couche cisailée est caractérisée par environ une trentaine de petits tourbillons (de taille typique  $\sim 2$  cm) qui s'apparient pour former un nombre relativement faible de grosses structures (2, 3, 4... de taille typique  $\sim 10$  cm, Alboussière *et al.* 1999). Ces visualisations ont été faites pour  $Ha \sim 40$  et  $Re \sim 10^6$ . Nous nous proposons de réexaminer ce point lorsque  $Ha$  devient beaucoup plus grand.

### 4.4.1 Estimation de l'échelle intégrale de l'écoulement

L'échelle intégrale de l'écoulement qui correspond à la taille caractéristique des plus grosses structures cohérentes est estimée à partir de la fonction d'inter-corrélations transversales du signal  $u'_\theta$  :

$$g(r_1) = \frac{\langle u'_\theta(x_1, 0, t) u'_\theta(x_1 + r_1, 0, t) \rangle}{\langle u'^2_\theta(x_1, 0, t) \rangle^{1/2} \langle u'^2_\theta(x_1 + r_1, 0, t) \rangle^{1/2}}. \quad (86)$$

Un exemple de calcul de cette fonction pour différentes valeurs de  $x_1$  est présenté par la figure 4.8. La corrélation entre les signaux de  $u'_\theta$  dans cette couche décroît assez vite de part et d'autre du maximum jusqu'à s'annuler en deux points  $r_1^0$  et  $r_1^1$ . Notons qu'au delà de ces points, la fonction  $g$  atteint des valeurs négatives relativement grandes ( $\simeq -0.7$ ). Cette corrélation négative entre deux signaux pris à l'intérieur et à l'extérieur de la couche cisailée, est due à ce que ceux-ci sont en opposition de phase (figure 4.9) et que par conséquent leur produit est en moyenne négatif. Ce cas, brièvement décrit par Hinze (1959), correspondrait à un écoulement globalement périodique donnant lieu à une fonction de corrélation oscillant autour de l'axe  $x_1$ . Notre écoulement, dont la

dynamique est dominée par des structures cohérentes évoluant de manière périodique à faible fréquence, conduirait alors à obtenir ce genre de fonctions périodiques.

Il est néanmoins possible de définir une échelle caractéristique des structures cohérentes, non plus au sens de  $\int_0^\infty g(r_1) dr_1$ , mais comme la distance  $r_1^0 - r_1^1$  sur laquelle la corrélation s'effondre dans la couche cisailée.

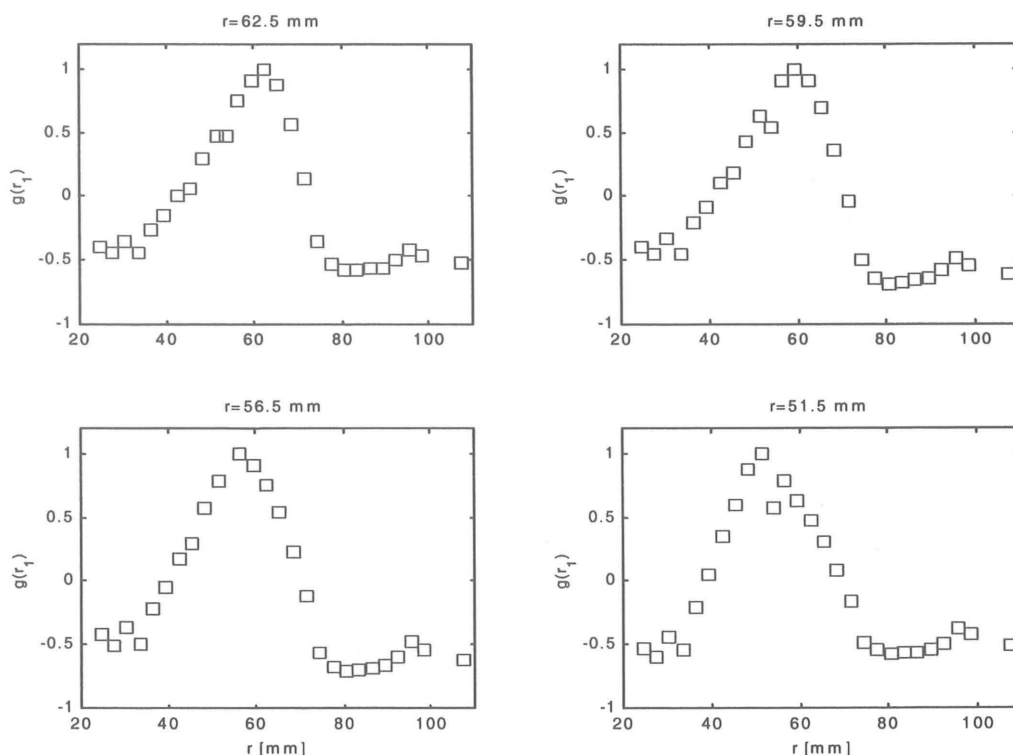


Figure 4.8 : Exemple de fonctions d'inter-corrélation  $g(r_1)$  calculées en différentes positions dans la couche cisailée pour  $B = 3$  T et  $I = 20$  A.

La figure 4.10 résume l'évolution de l'échelle intégrale compensée  $l_\varrho \times Re^{-1/2}$  et  $l_\varrho \times Ha^{1/2}$  en fonction de  $Re$  ( $Re = 0.5 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6$ ) et de  $Ha$ . ( $Ha = 600 - 1800$ ). Il semble bien établi qu'une loi d'évolution en  $Re^{1/2}$  existe pour  $Re \lesssim 2 \cdot 10^6$  ( $I \lesssim 30$  A). Pour toutes les valeurs de  $Ha$  ( $2 \leq B \leq 6$  T) l'échelle intégrale varie en  $Ha^{-1/2}$ .



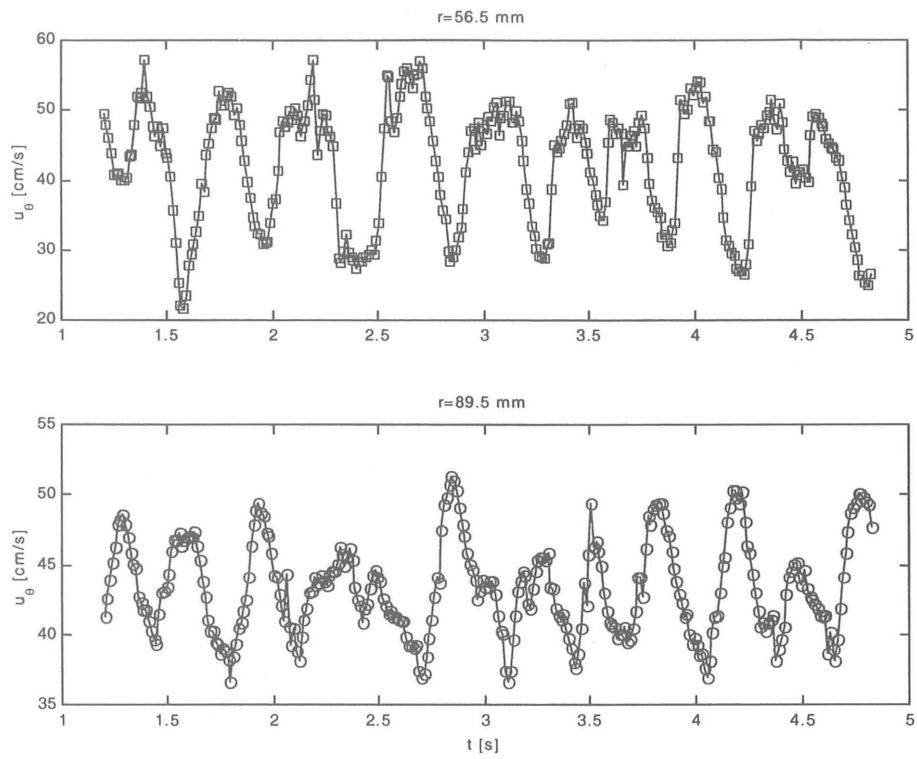


Figure 4.9 : Signaux de  $u_\theta$  mesurés à l'intérieur ( $r = 56.5 \text{ mm}$ ) et à l'extérieur de la couche cisailée ( $r = 89.5 \text{ mm}$ ).

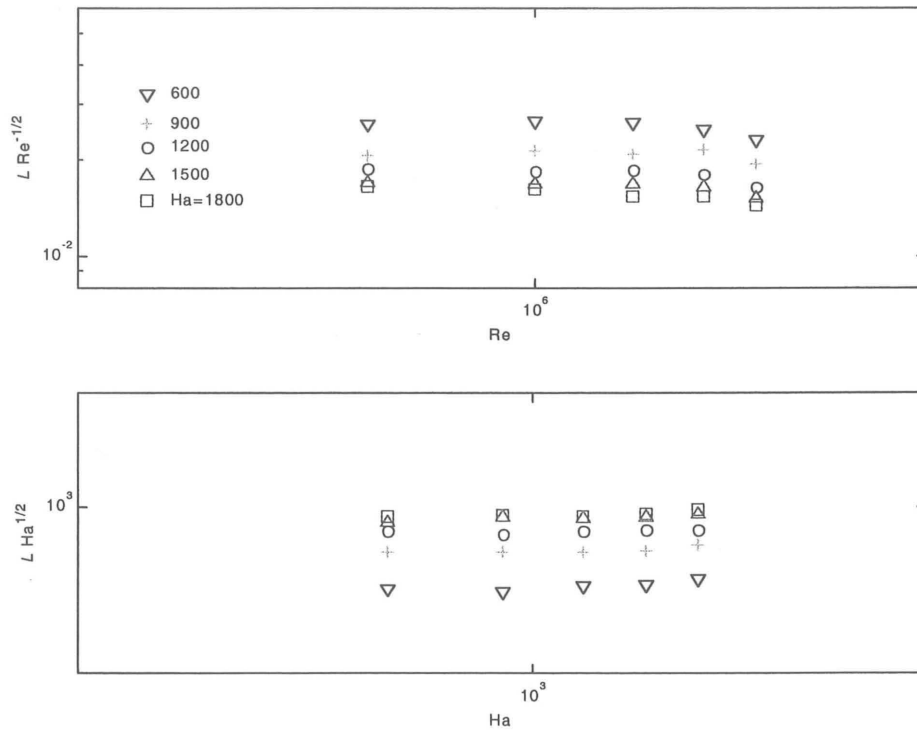


Figure 4.10 : Evolution du logarithme de l'échelle intégrale compensée  $l_\rho \times Re^{-1/2}$  et  $l_\rho \times Ha^{1/2}$  en fonction du logarithme de  $Re$  et de  $Ha$ .

#### 4.4.2 Modèle élémentaire d'évolution de l'échelle intégrale

On propose un modèle simple d'évolution de l'échelle intégrale  $l_\rho$  basé sur l'équilibre local quasi-stationnaire entre les transferts d'énergie et la dissipation par effet Joule dans les couches de Hartmann dans la zone intermédiaire des nombres d'ondes du spectre d'énergie  $k_\rho < k < k_i$  ( $k_\rho = 1/l_\rho$  étant le nombre d'onde correspondant à l'échelle intégrale et  $k_i$  le nombre d'onde d'injection). En turbulence 2D entretenue, le flux d'énergie  $\varepsilon_i$  injecté autour du nombre d'onde  $k_i$  est transféré jusqu'au nombre d'onde  $k_\rho$  (cascade inverse d'énergie, voir par exemple Kraichnan, 1967, 1971b, Frisch, 1995). L'équation du spectre d'énergie dans l'espace de Fourier peut s'écrire :

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = -2\nu k^2 E(k, t) - \frac{2}{\tau_H} E(k, t) + T(k, t) + F(k, t), \quad (87)$$

où  $F$  est le terme de forçage tel que  $\int_0^\infty F(k) dk = \varepsilon_i$ . En régime stationnaire et en négligeant le terme visqueux, cette équation se réduit à

$$\frac{2}{\tau_H} E(k) = T(k) + F(k). \quad (88)$$

En intégrant (88) de 0 à l'infini ( $\int_0^\infty T(k) dk = 0$ ) on obtient

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\tau_H} \int_0^\infty E(k) dk. \quad (89)$$

Dans la gamme de nombre d'ondes  $k$  tel que  $k_\rho < k < k_i$  l'équation du spectre d'énergie s'écrit

$$\frac{2}{\tau_H} E(k) = T(k), \quad (90)$$

relation qui exprime l'équilibre local entre le transfert d'énergie d'un nombre d'onde à un autre et la dissipation locale d'énergie par effet Joule dans les couches de Hartmann.

Le terme de transfert  $T(k)$  décrit au § 4.3.2 est homogène à une énergie divisée par l'inverse d'un temps

$$T(k) \simeq E \frac{u}{l} \simeq E k (k E)^{1/2}. \quad (91)$$

En combinant les équations (90) et (91), la densité (ou spectre) d'énergie s'écrit alors

$$E(k) = C \tau_H^{-2} k^{-3}. \quad (92)$$

La constante  $C$  de l'équation (92) ne peut être universelle car elle dépend à la fois de  $\varepsilon_i$  et de  $k_i$ . Elle est obtenue à partir des deux relations dimensionnelles suivantes.

Le flux d'énergie  $\varepsilon(k)$ , qui n'est pas constant à cause de la dissipation d'énergie dans les couches de Hartmann, peut s'écrire dimensionnellement comme

$$\varepsilon(k) = C_1 \tau_H^{-3} k^{-2}, \quad (93)$$

et la densité spectrale d'énergie comme

$$E(k) = C_K \varepsilon(k)^{2/3} k^{-5/3}. \quad (94)$$

On obtient alors

$$C = C_K \varepsilon_i^{2/3} \tau_H^2 k_i^{4/3}, \quad (95)$$

où  $C_K$  est la constante de Kolmogorov. En supposant maintenant que le flux d'énergie dissipé  $\varepsilon_H$  est du même ordre que le flux injecté  $\varepsilon_i$  ( $\varepsilon_H \simeq \varepsilon_i$ ) on peut écrire

$$\varepsilon_i \simeq \varepsilon_H = \frac{2}{\tau_H} \int_{k_\rho}^{k_i} E(k) dk. \quad (96)$$

En supposant également que l'échelle à laquelle se fait l'injection est très petite devant l'échelle intégrale ( $k_i^2 \gg k_\rho^2$ ), on obtient finalement

$$k_\rho^2 \simeq C_K k_i^{4/3} \varepsilon_i^{-1/3} \tau_H^{-1} \simeq C_K (L k_i)^{4/3} \frac{1}{h^2} \left( \frac{Ha}{Re} \right), \quad (97)$$

où  $\tau_H^{-1}$  est remplacé par  $\frac{\nu Ha}{h^2}$  et  $\varepsilon_i$  par  $\frac{1}{\tau_{tu}} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \simeq \frac{U^3}{L} = \frac{(\nu Re)^3}{L^4}$ .

Ce modèle élémentaire, basé d'une part sur l'hypothèse de localité des transferts d'énergie et d'autre part sur l'équilibre quasi-stationnaire entre ces transferts et la dissipation d'énergie dans les couches de Hartmann, montre que l'échelle intégrale de l'écoulement varie en fonction de  $Ha$  et  $Re$  selon une loi en  $\left( \frac{Ha}{Re} \right)^{-1/2}$ . Cette loi que l'on retrouve expérimentalement à partir des calculs d'échelle intégrale (§ 4.4.1) peut aussi expliquer la loi expérimentale d'évolution de l'épaisseur de la couche cisailée libre  $\delta_{||} \sim \left( \frac{Ha}{Re} \right)^{-1/2.3}$  (§ 3.2.2).

Il est important maintenant de comparer cette loi,  $h/l_\rho \sim (Ha/Re)^{1/2}$ , avec celle donnant l'évolution de l'élancement  $l_{||}/l_\perp$  d'un tourbillon initialement isotrope soumis à un champ magnétique et sans parois de Hartmann (Alemany *et al.* 1979) :

$$l_{||}/l_\perp \sim N^{1/2} \quad (98)$$

où  $l_{||}$  et  $l_\perp$  sont respectivement l'échelle longitudinale ( $||$  à  $B$ ) et transversale ( $\perp$  à  $B$ ) du tourbillon, et  $N = Ha^2/Re$  le paramètre d'interaction. Cette relation découle simplement de l'équilibre entre la dissipation par effet Joule (caractérisée par le temps  $\tau_J = \frac{\sigma B^2}{\rho}$ ) et les transferts inertiels (caractérisés par le temps  $\tau_{tu} \sim (k^3 E(k))^{1/2}$ ). Il est clair qu'en présence de couches de Hartmann, l'élancement d'un tourbillon ne varie plus en  $N^{1/2}$  mais en  $(N/Ha)^{1/2}$  (97). Cela s'explique par le fait que la densité de courant dans le cœur de l'écoulement, de l'ordre de  $\sigma Bu/Ha$ , est  $Ha$  plus faible que celle dans les couches de Hartmann ( $\sim \sigma Bu$ ), ce qui implique que le rapport entre la force de Laplace et l'inertie dans le cœur soit l'ordre de  $Ha/Re$  et non plus  $N = Ha^2/Re$ .

#### 4.4.3 Vitesse de transit des structures cohérentes

La vitesse de transit des structures cohérentes  $\Omega_S$  est déduite du temps  $m_j \Delta t$  nécessaire à une structure pour passer d'une position angulaire  $\theta_1$  à  $\theta_j$ . Ce temps est estimé à partir des inter-corrélations spatio-temporelles des fluctuations de la vitesse

radiale  $u'_r(\theta, t)$ . Ces vitesses sont mesurées à l'aide d'un groupe de sondes pariétales disposées le long d'un arc de cercle de rayon  $R_1 = 68.5$  mm. La figure 4.11 montre deux signaux typiques de  $u'_r$  et  $u'_\theta$  mesurés simultanément en deux positions angulaires  $\theta_1 = 0$  et  $0.65$  rad. On remarque que l'amplitude des oscillations de la vitesse angulaire  $u'_\theta$  est relativement faible comparée à celle de la vitesse radiale ( $u'_\theta \simeq 0.2 u'_r$ ), indiquant que la trajectoire du centre des structures est assez proche de l'arc de cercle de mesure. De plus on observe que les signaux  $u'_r(\theta, t)$  sont assez bien corrélés suivant la direction de l'écoulement moyen, ce qui justifie l'emploi de ceux-ci pour déterminer le temps de transit  $m_j \Delta t$  ( $1/\Delta t$  étant la fréquence d'échantillonnage du signal).

En pratique, pour déterminer le "retard" entre deux signaux, il suffit de les décaler l'un par rapport à l'autre d'un temps  $m_j \Delta t$  de façon à ce que la corrélation entre ces deux signaux deviennent maximale. En d'autres termes, il suffit de calculer l'intégrale,  $Int(m_j) = \int_{t_0}^{t_1} u'_r(\theta_1, t) u'_r(\theta_j, t + m_j \Delta t) dt$ , et de déterminer la valeur de l'entier  $m_j$  pour laquelle  $Int(m_j)$  est maximum. La vitesse angulaire de transit,  $\Omega_j$ , est alors donnée par :

$$\Omega_j = \frac{\theta_j - \theta_1}{m_j \Delta t}. \quad (99)$$

Une moyenne faite sur les  $j$  vitesses angulaires correspondant aux  $j$  couples de vitesses radiales ( $u'_r(\theta_1, t)$ ,  $u'_r(\theta_j, t)$ ) permet d'obtenir la vitesse moyenne angulaire de transit des structures cohérentes :

$$\Omega_S = \frac{1}{j} \sum_1^j \Omega_j. \quad (100)$$

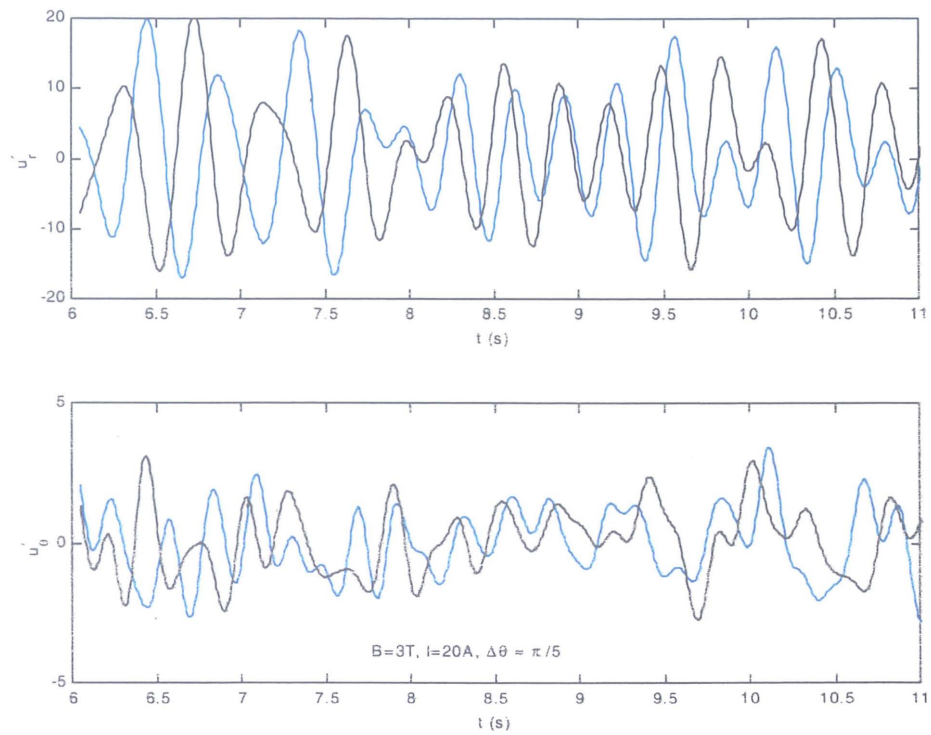


Figure 4.11 : Signaux typiques de  $u'_\theta$  et  $u'_r$  filtrés à 5 Hz. Ces signaux sont mesurés simultanément à  $r \simeq 68.5$  mm en deux positions angulaires  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_1 = 0.654$  rad.

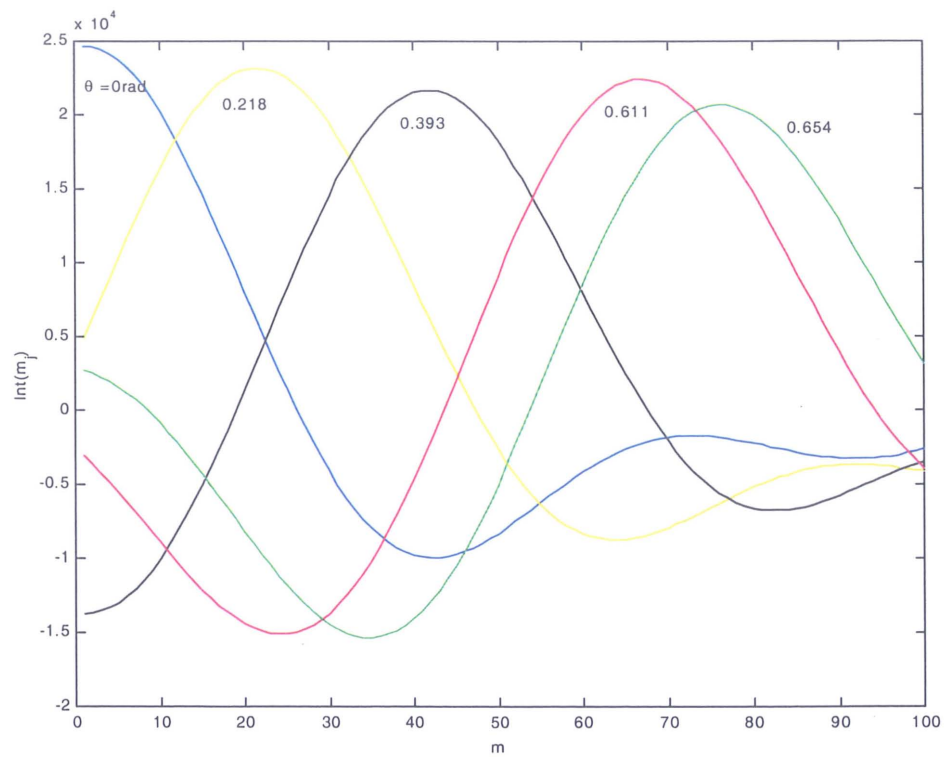


Figure 4.12 : Inter-corrélations spatio-temporelles  $Int(m_j)$

L'évolution de la vitesse  $V_S = \Omega_S \times R_1$  en fonction de  $B$  et  $I$ , représentée par la figure 4.13 montre bien une dépendance linéaire avec le courant  $I$ , où l'influence du champ  $B$  reste négligeable, excepté pour les faibles valeurs de  $B$  ( $B \lesssim 1$  T). Ceci est en accord avec l'idée générale selon laquelle le champ magnétique contrôle essentiellement le "niveau" de bidimensionalité, tandis que le courant  $I$  le paramètre de contrôle de l'écoulement.

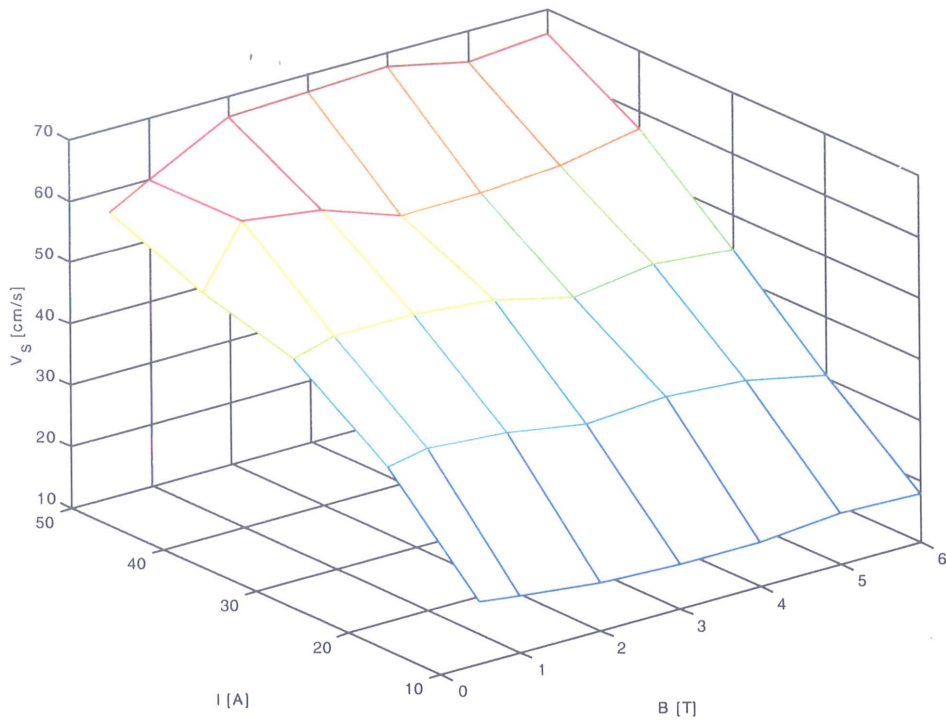


Figure 4.13 : Evolution de la vitesse de transit des structures cohérentes  $V_S = \Omega_S \times R_1$  en fonction de  $B$  et  $I$ .

#### 4.4.4 Nombre des structures cohérentes

Les pics d'énergie à faible fréquence indiquent la présence de structures cohérentes dans l'écoulement de base mais ne permettent pas d'en déduire directement leur nombre. En effet, dans de nombreux cas on observe deux pics distincts. L'un à une fréquence  $f$ , dont l'énergie est 3 à 4 fois plus faible que le second à une fréquence

$2 \times f$  (figures 4.14), pour lesquels il semble difficile d'associer un nombre de structures cohérentes.

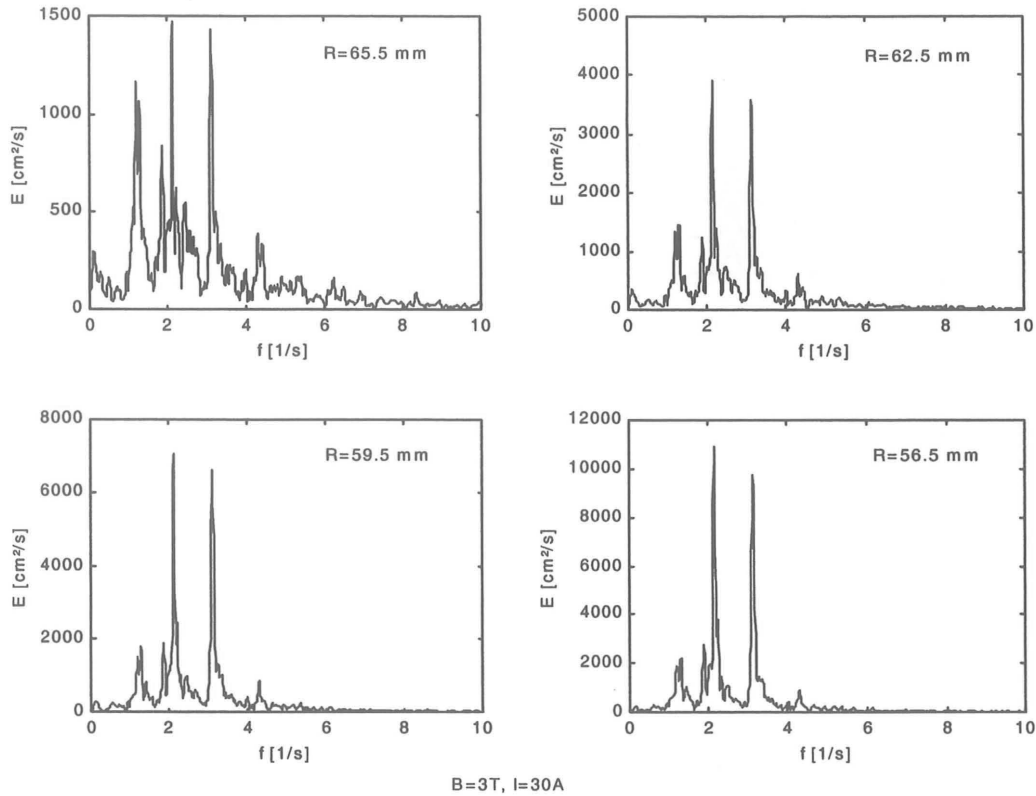


Figure 4.14 : Exemples de spectres temporels en représentation linéaire calculés dans la couche cisillée pour  $B = 3\text{ T}$  et  $I = 30\text{ A}$ .

Dans l'exemple qui suit, on tente à partir d'une distribution radiale de spectres temporels (normés par leur valeur max, figure 4.15), de construire un scénario probable et d'en tirer une information sur le nombre des structures cohérentes. On remarque que pour toutes les positions radiales, à l'exception de celles comprises entre  $R = 56$  et  $R = 61\text{ mm}$ , la fréquence des pics d'amplitude max est de  $2\text{ Hz}$  alors que pour les autres elle est de  $4\text{ Hz}$ . Ceci veut dire qu'à chaque seconde, les sondes situées dans la zone ( $56 < r < 61$ ) voient passer deux fois plus de structures que celles situées à l'extérieur de cette zone. Pour les mêmes conditions expérimentales de la figure 4.15 ( $B = 5\text{ T}, I = 20\text{ A}$ ), le temps nécessaire à une structure pour faire un tour de la cellule est de l'ordre de  $1\text{ s}$  (§ 4.4.3). Si on considère que toutes les structures sont



convectées par l'écoulement de base à la même vitesse, ce raisonnement conduit à un nombre moyen de quatres structures cohérentes, deux petites et deux plus grandes.

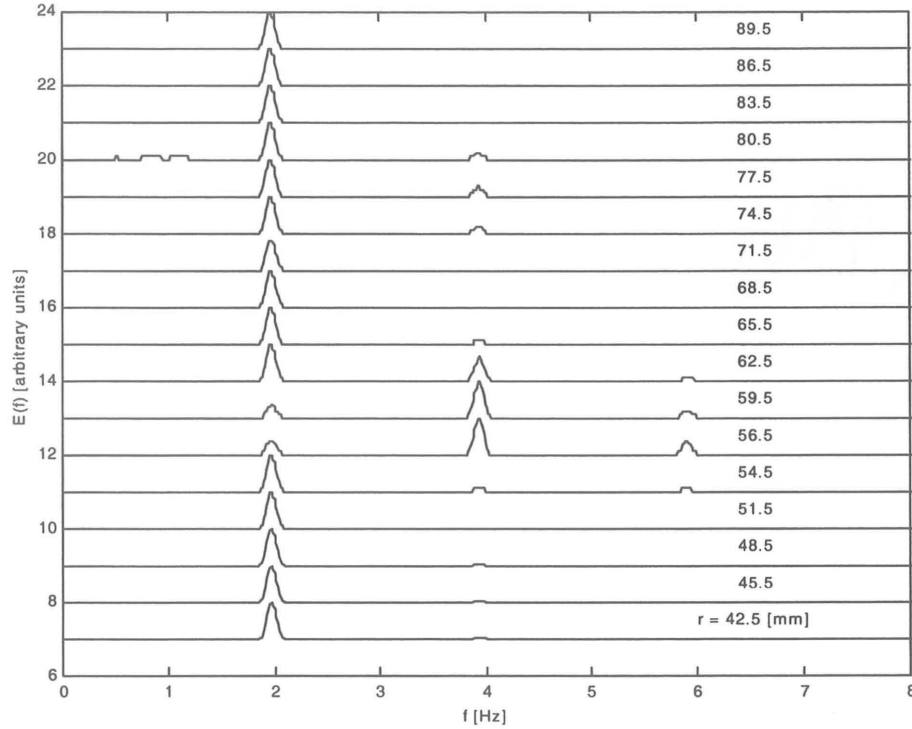


Figure 4.15 : Spectres temporels d'énergie calculés pour différentes positions radiales,  $B = 5 \text{ T}$ ,  $I = 20 \text{ A}$ .

Afin de déterminer de façon systématique le nombre des structures cohérentes, on reconstitue le champ de vorticité dans toute la boîte à partir des mesures de vitesses effectuées sur un rayon et à divers instants. A chaque instant  $t = t_0 + n\Delta t$ , le champ de vitesse  $U(r) = (u_\theta^2(r) + u_r^2(r))^{1/2}$  correspondant est représenté à  $\theta = \theta_0$  (position des sondes de mesures) alors que celui mesuré à  $t = t_0$  effectue une rotation d'un angle  $\theta = n\Omega_S \Delta t + \theta_0$ . le champ de vorticité est alors calculé à partir de ce champ de vitesse reconstitué  $U(r, \theta)$ , puis représenté en plan droit (figure. 4.16 et 4.17). L'axe Oy représente le nombre de rotations successives  $n$ , correspondant à un tour complet de la cellule.

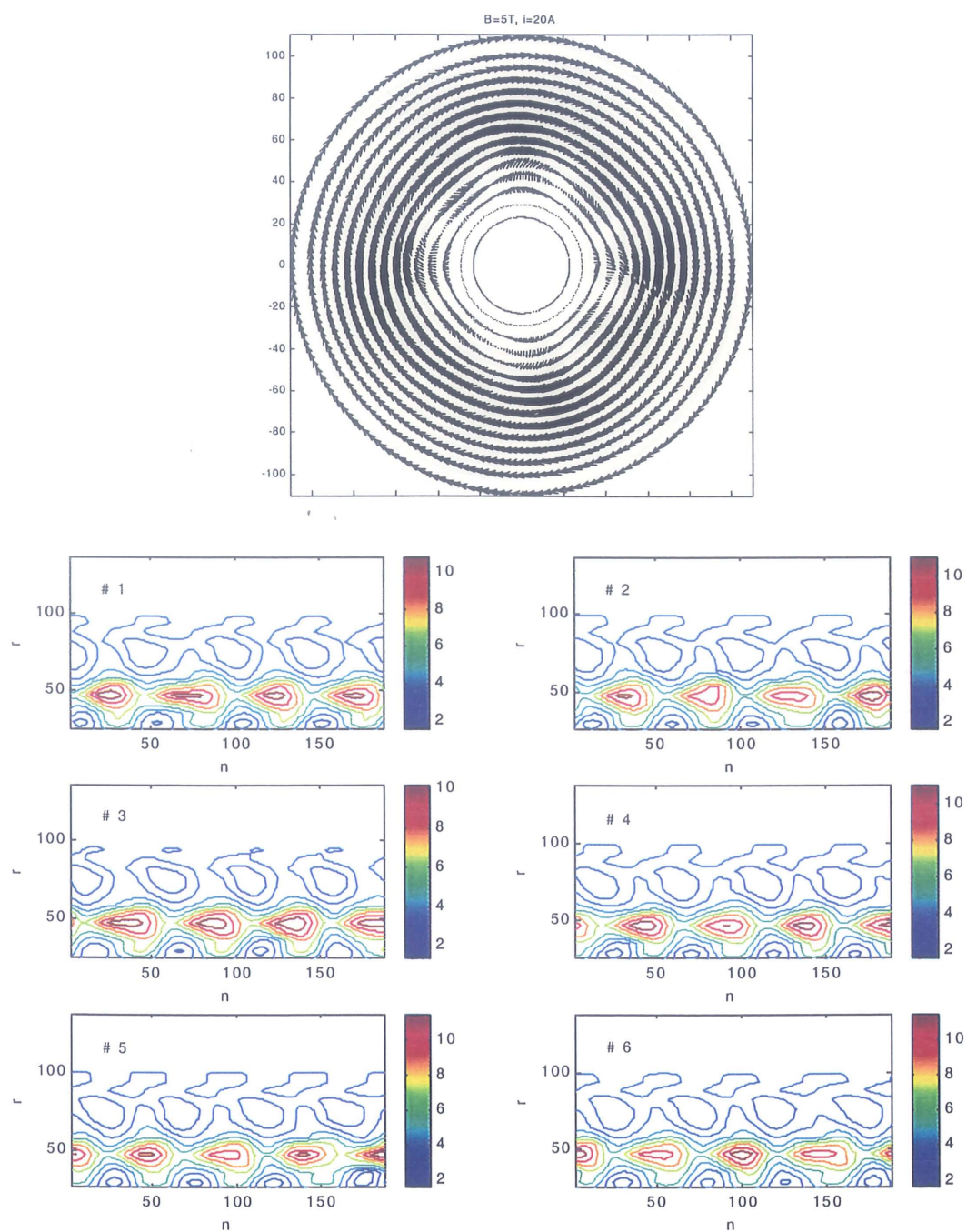


Figure 4.16 : Champ de vitesse sur un tour et champs de vorticité sur 6 tours obtenus pour  $B = 5 \text{ T}$  et  $I = 20 \text{ A}$ .

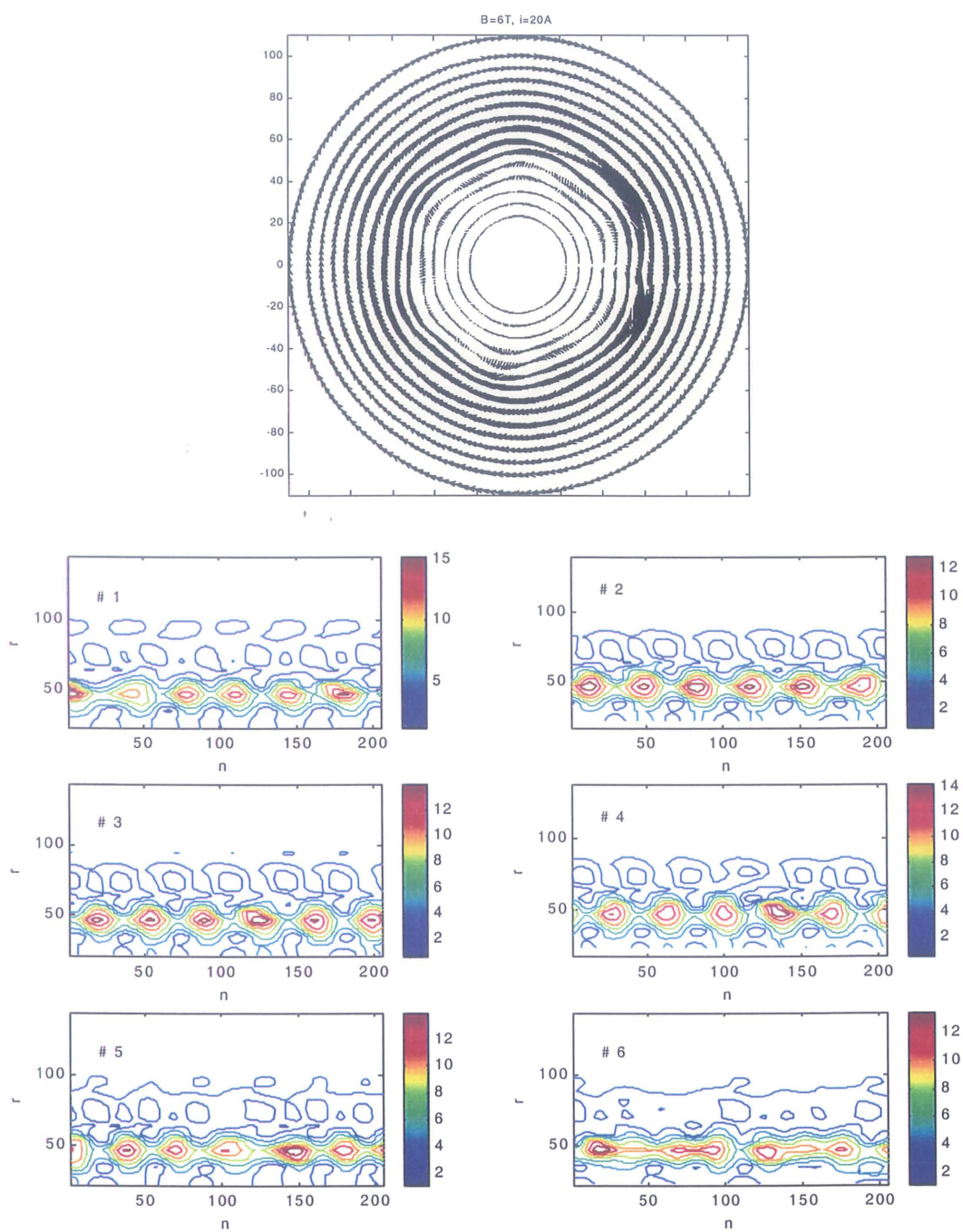


Figure 4.17 : Champ de vitesse sur un tour et champs de vorticité sur 6 tours obtenus pour  $B = 6\text{ T}$  et  $I = 20\text{ A}$ .

Le champ de vorticité représenté par la figure 4.16 correspond aux conditions de la figure 4.15 ( $B = 5$  T et  $I = 20$  A), et confirme bien la présence de 4 structures cohérentes. La figure 4.17 quant à elle, montre un de champ de vorticité calculé pour la même valeur du courant mais pour un champ plus important ( $B = 6$  T). Le nombre de structures que l'on peut compter passe alors de 4 à 6. En effet, la dissipation par effet Joule dans les couches de Hartmann devient plus importante dans ce dernier cas et des échelles de moins en moins grandes sont atteintes par la cascade inverse d'énergie. La taille typique des structures cohérentes diminue avec le champ (ou la dissipation) et leur nombre augmente.

Le même calcul est réalisé pour différentes valeurs de  $B$  et  $I$  et permet de tracer l'évolution du nombre moyen  $N_S$  des structures cohérentes (figure 4.18). La comparaison entre les figures 4.18.a et 4.18.b montre que  $N_S$  dépend du rapport  $\tau_{tu}/\tau_H$ . La figure 4.18.c représente la quantité  $N_S \times \left(\frac{Re}{Ha}\right)^{0.4}$  en fonction du rapport  $\frac{Re}{Ha}$  et suggère que le nombre de structures cohérentes  $N_S$  varie comme  $C \times \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{1/2.5}$  avec  $C \simeq 80$ .

**Remarque** Dans ce calcul il est admis que le temps de vie d'une structure cohérente est au moins égal à son temps de transit sur un tour. Les fonctions d'intercorrélations représentées en figure 4.12 montrent que la corrélation entre deux signaux de vitesses distants de  $\pi/5 \times R_1$  est de l'ordre de 90% de l'auto-corrélation, et laissent donc penser que cette hypothèse sur la durée de vie est assez correcte.



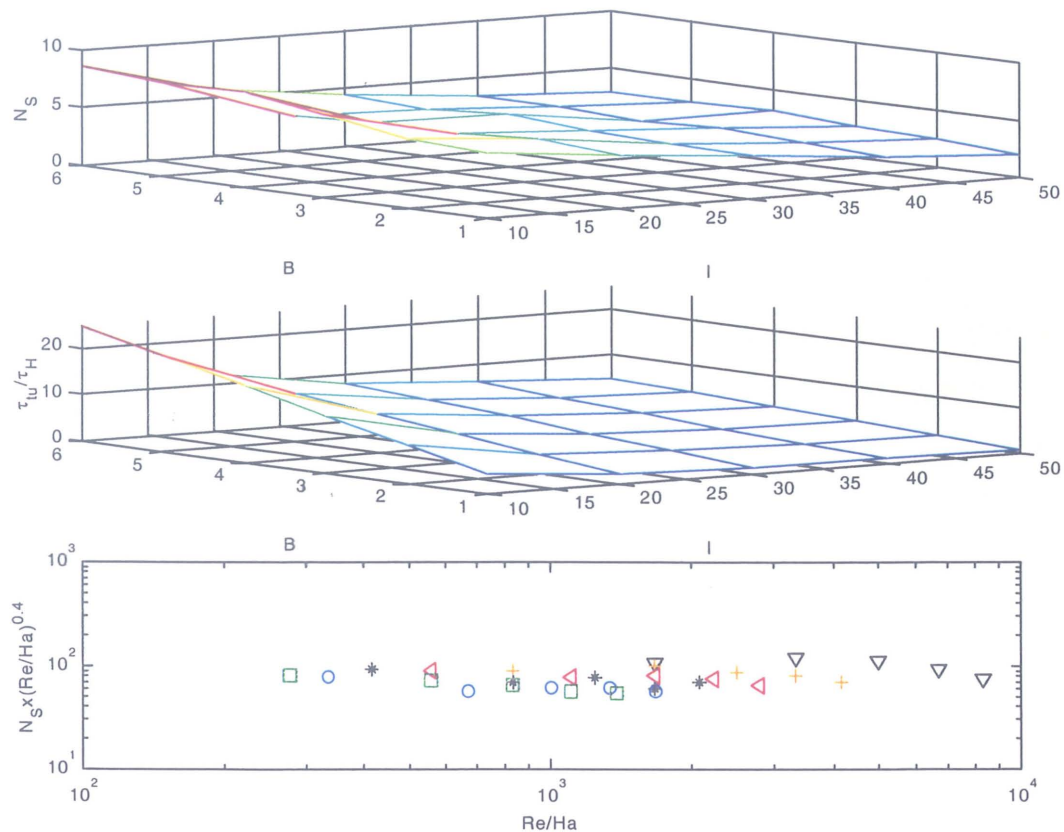


Figure 4.18 : (a). Evolution du nombre des structures cohérentes  $N_S$  avec  $B$  et  $I$ . (b). Rapport entre le temps inertiel et de dissipation dans les couches de Hartmann  $\tau_{tu}/\tau_H$  en fonction de  $B$  et  $I$ . (c)

## 4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, quelques propriétés du champ de vitesse turbulent sont étudiées. Nous nous sommes d'abord attachés à comprendre comment l'énergie cinétique est transférée d'un nombre d'onde  $k$  à un autre. Les spectres d'énergie présentent des pics à faible fréquence indiquant la présence de structures cohérentes convectées par l'écoulement de base, suivis d'une zone en loi de puissance ( $k^{-5/3}$  ou  $k^{-3}$ ) s'étendant sur moins d'une décade. Ces structures, dont l'échelle caractéristique est beaucoup plus grande que l'échelle à laquelle s'effectue le forçage, ne peuvent alors être alimentées que par des échelles plus petites *via* un mécanisme de transfert inverse d'énergie. Notons que l'échelle caractéristique du forçage est estimée à partir des calculs de spectres de

transferts ( $T(k)$ ), et que ces spectres confirment bien le mécanisme de cascade inverse d'énergie.

Les spectres en  $k^{-3}$  que nous observons pour des valeurs importantes du champ et du courant ( $Ha > 150$  et  $Re > 10^6$ ) et qui sont associés à la cascade directe d'énstrophie en turbulence 2D classique, sont attribués ici à l'équilibre quasi-stationnaire entre les transferts inertiels et la dissipation d'énergie par effet Joule dans les couches de Hartmann. Un raisonnement dimensionnel conduit alors à un spectre d'énergie  $E(k) = C \tau_H^{-2} k^{-3}$  (§ 4.4.2). Pour des valeurs faibles plus de  $Ha$  et  $Re$ , les spectres d'énergie présentent une zone inertielle comprise entre l'échelle de forçage et l'échelle intégrale en  $k^{-5/3}$ , indiquant que la dynamique de l'écoulement est celle d'une turbulence 2D classique (non MHD) ; le temps caractéristique de la dissipation Joule dans ce cas étant plus long que le temps caractéristique des transferts inertiels. Notons que pour les structures turbulentes dont les échelles correspondent à la partie auto-similaire des spectres (zone en  $k^{-n}$ ) les transferts d'énergie cinétique peuvent être considérés comme locaux (les hypothèses de localité et d'auto-similarité conduisent en effet à une loi en puissance de type  $k^{-n}$ , voir par exemple Frisch, 1995).

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons tenté de décrire les principales propriétés des structures cohérentes, à savoir leur taille caractéristique, leur vitesse convective et leur nombre. L'étude de ces propriétés sur une large gamme de  $Ha$  et  $Re$  a permis d'en déduire les lois d'échelles suivantes :

La vitesse convective des structures est linéaire en  $Re$  et ne dépend pas de  $Ha$ . Ceci est compatible avec le caractère quasi-bidimensionnel de l'écoulement qui, rappelons le, conduit à ce que la vitesse de cœur est une fonction linéaire du courant (ou de  $Re$ ) et ne dépend pas du champ magnétique (§ 1.1.6).

La taille typique des structures cohérentes ainsi que leur nombre sont gouverné par un seul paramètre : le rapport ( $Ha/Re$ ). Dans le premier cas nous avons trouvé que  $l_\eta$  varie en  $(Ha/Re)^{-1/2}$  ( $l_\eta$  étant l'échelle intégrale) et nous avons proposé un modèle élémentaire d'évolution de l'échelle intégrale basé sur l'hypothèse de localité des transferts, et sur l'équilibre quasi-stationnaire entre ces transferts et de la dissipation Joule dans les couches de Hartmann. Ce modèle prédit bien une loi en  $(Ha/Re)^{1/2}$ . Les structures cohérentes ont été 'observées' grâce à la reconstitution du champ de

vorticité total déduit des profils de vitesses radiales et azimutales . Leur nombre a ainsi pu être déterminé et son évolution est donné par la loi  $N_S \sim (Ha/Re)^{+1/2.5}$ . Nous pouvons alors considérer que le nombre des structures cohérentes est quasiment inversement proportionnel à leur taille.

# Chapitre 5

## 5 Le champ de température

### 5.1 Introduction

Les propriétés de transport d'un scalaire passif en turbulence MHD (quasi-2D ou non) ont été étudiées expérimentalement par différents auteurs, soit en régime de convection forcée (par exemple Kolesnilov & Tsinober, 1974, Sommeria, 1983) ou en régime de convection naturelle (Cioni, 1996, Alboussière *et al.*, 1999 etc...). Dans toutes ces configurations le nombre Reynolds et le nombre de Hartmann étaient suffisamment faibles pour qu'il ne soit pas nécessaire de prendre en compte l'élévation de température liée au passage du courant électrique dans les couches de Hartmann (quand celles-ci jouaient un rôle important dans le contrôle de l'écoulement de cœur). Le but de ce chapitre n'est pas de caractériser les propriétés de transport de cette turbulence MHD quasi-2D, mais d'attirer l'attention du lecteur sur les problèmes liés aux mesures de température par thermocouples, tels que ceux que nous avons utilisés, et ce particulièrement pour les grandes valeurs de  $Ha$  et  $Re$ . Ces problèmes seront illustrés par



quelques exemples et des remarques concernant la statistique du champ de température fluctuant seront faites.

## 5.2 Commentaires sur les mesures de température

Dans notre expérience, le champ de température ne peut être caractérisé sur une large gamme de paramètres ( $B$  et  $I$  ou  $Ha$  et  $Re$ ) comme pour les chapitres précédents. En effet, pour que l'écoulement soit quasi-2D sur toute la gamme de  $Re$ , le champ magnétique doit être supérieur ou égal à une certaine valeur critique ( $B \simeq 2$  T), valeur à partir de laquelle les effets faiblement 3D sont amortis. A ceci, s'ajoute une restriction imposée d'une part par la technique de mesure qui, pour des valeurs assez grandes du champ et du courant ( $I \gtrsim 20$  A et  $B \gtrsim 2$  T) ne permet pas d'accéder directement à la température (effet du champ électromoteur) et d'autre part, par le réchauffement du fluide dû au passage du courant électrique dans les couches de Hartmann (propriété intrinsèque de cet écoulement MHD quasi-2D). Rappelons par ailleurs qu'un flux de chaleur d'une puissance de 10 watts est injectée au centre de la cellule puis évacuée par le mur extérieur maintenu à une température constante, égale à la température des soudures froides des thermocouples.

**Effet du champ électromoteur** L'intensité du champ électromoteur  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , dont la moyenne est ajoutée aux signal thermoélectrique dépend du champ magnétique, de la vitesse locale débitante (ou plus globalement de  $I$ ) et du décentrage du fil de platine par rapport au tube de cupro-nickel (§ 2.3.4). Si le fil de platine est parfaitement centré, le signal de température que l'on mesure est uniquement d'origine thermoélectrique. En pratique il est très difficile, voir impossible d'obtenir un centrage parfait. Quelques centièmes de millimètre d'écart suffisent pour que le signal MHD ( $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ) soit du même ordre que le signal thermoélectrique. Pour des mesures de température moyenne, ce problème peut être contourné d'une manière simple : La moyenne de  $T$  est calculée après avoir stoppé le forçage ( $I = 0$ ) sur 5 secondes de signal (soit à peu près 800 points), à partir de l'instant où la vitesse s'annule. Durant ce laps de temps, une tache de fluide à une température donnée, s'élargit par diffusion de  $(\alpha t)^{1/2} \simeq 1.5$  cm ( $\alpha$  étant la diffusivité thermique  $\simeq 4 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup> pour le mercure et  $t$  le temps considéré). Ceci

implique que pour les échelles supérieures à 1.5 cm le signal de température garde la même information. En d'autres termes, les fluctuations de la températures aux échelles plus petites que 1.5 cm sont lissées par la diffusion. Comme l'écoulement est dominé par les grandes échelles nous pouvons penser que les transferts de température le sont aussi, et que par conséquent le champ moyen de la température peut être déterminé par cette méthode. Par ailleurs, il est évident qu'une statistique (RMS, spectres etc...) de la température sur 800 points ne peut être faite.

L'analyse simultanée de séquences de vitesse et de température n'a pas montré de corrélation nette entre ceux-ci et n'a donc pas permis d'extraire le signal de température réel (uniquement d'origine thermoélectrique) du signal mesuré ou apparent (thermoélectrique et MHD). Des spectres des fluctuations de la température en régime d'écoulement quasi-stationnaire, donc avec la contribution du terme  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , ont cependant été calculés pour quelques valeurs du courant et du champ en différents points dans la couche cisailée. Ces spectres, dont un échantillon est représenté par la figure 5.1, montrent que l'énergie contenue dans ces signaux est très faible (de l'ordre de celle du bruit). Contrairement aux spectres d'énergie cinétique, aucune zone inertielle n'est observable.

**Réchauffement du fluide *via* les couches de Hartmann** Ce réchauffement résulte de la dissipation par effet Joule du courant électrique ( $P_{Hg} = R_{Hg} I^2$ ) dans les couches de Hartmann (à ne pas confondre avec la dissipation Joule électromagnétique localisée dans ces mêmes couches). Une estimation globale cette dissipation (§ 2.5) montre que pour, par exemple,  $B \simeq 2$  T et  $I \simeq 50$  A, la puissance thermique fournie au mercure par les couches de Hartmann est du même ordre de grandeur que la puissance injectée par le plot central. Pour des valeurs plus importantes du champ et du courant, la puissance injectée par le plot devient négligeable comparée à celle injectée par les couches de Hartmann. Si l'on souhaite comprendre comment la température est transportée de part et d'autre de la couche cisailée, il est donc nécessaire de se placer au dessous de ces valeurs critiques de  $B$  et  $I$  (voir tableau 2.2, page 36)

Un exemple de distributions radiales de la température moyenne est illustré par la figure 5.2. Les mesures sont réalisées avec un champ magnétique égale à 1 T pour différentes valeurs du courant ( $I$  de 10 à 60 A). Les figures (a), (b) et (c) représentent

respectivement des profils moyen de température apparente obtenus sans plot chauffant, des profils moyens de température réelle toujours sans chauffage central et enfin des profils moyens de température réelle avec plot chauffant. Les figures (a) et (c) illustrent les effets du champ électromoteur et du réchauffement du fluide *via* les couches de Hartmann.

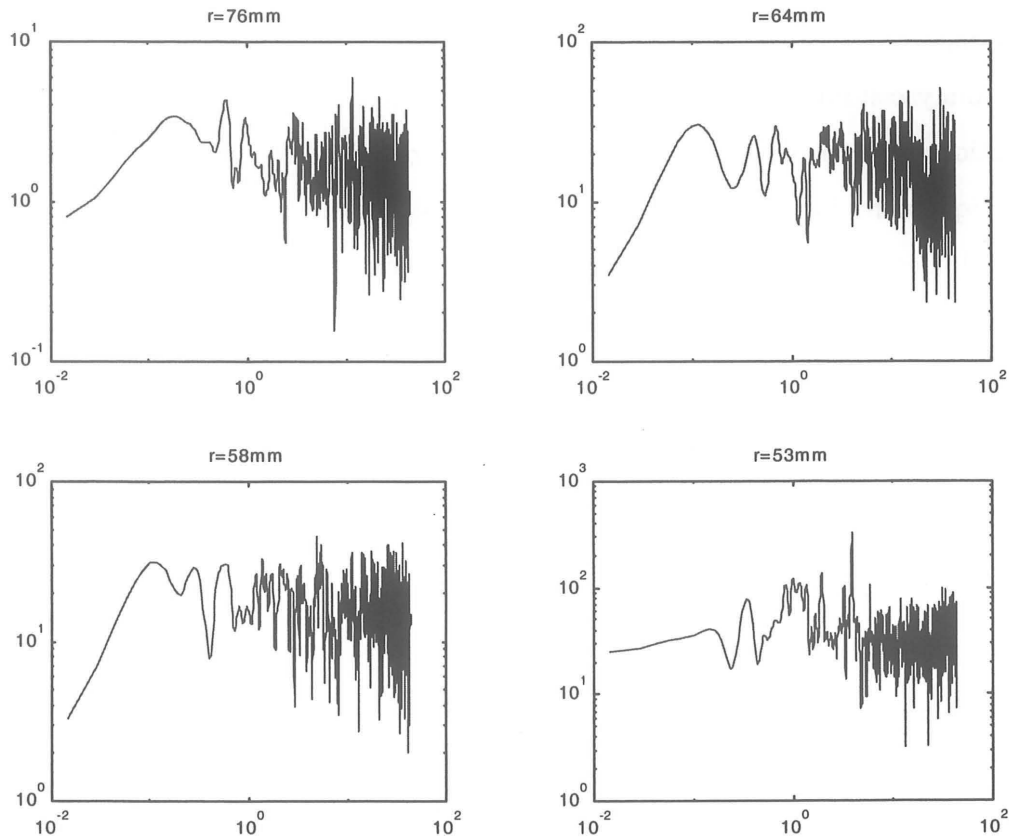


Figure 5.1 : Exemple de spectres de fluctuations de la température pour  $B = 1$  T et  $I = 30$  A en différents points dans la couche cisailée.

La comparaison des profils entre les figures (b) et (c) confirme bien que le chauffage *via* les couches de Hartmann ne peut pas être négligé. Ceci expliquerait pourquoi dans les expériences d'Alboussière *et al.* (1999), l'évolution du champ moyen de température en fonction du courant n'est pas monotone. En effet, la puissance thermique injectée *via* ces couches varie en  $I^2$  (§ 2.5.2) et on s'attend à ce que dans la couche cisailée, la température décroisse quand  $Re$  (ou  $I$ ) augmente (effet de la turbulence qui tend à

homogénéiser le champ de température). On comprend alors que dans Alboussière *et al.* (1999) la température passe par un minimum pour une certaine valeur du courant.

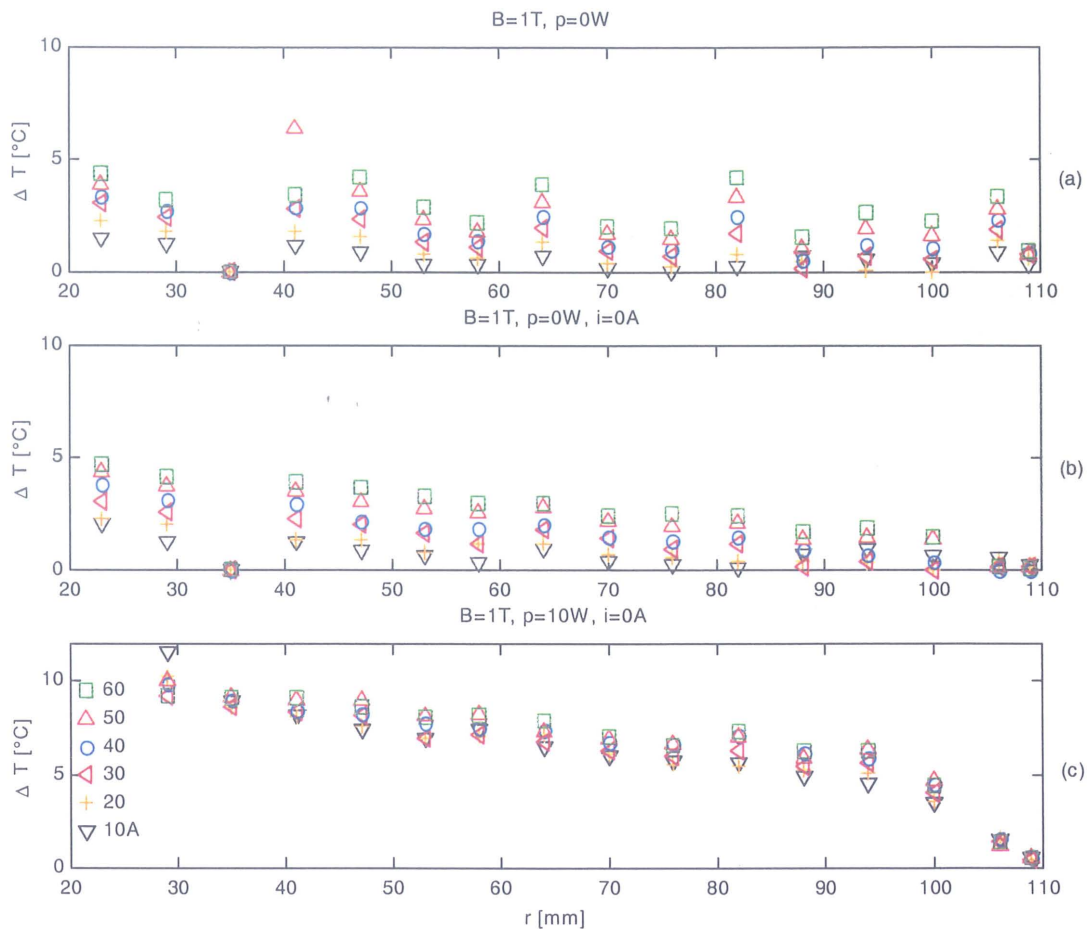


Figure 5.2 : Exemple de distributions radiales de la température moyenne pour  $B = 1$  T obtenues pour différentes intensités du courant. (a) : température apparente sans plot chauffant. (b) : température réelle sans plot chauffant. (c) : température apparente avec plot chauffant.

### 5.3 Conclusion

L'analyse des mesures de température est abordée dans ce chapitre sous forme de commentaires. Nous montrons que les mesures du champ de température sont perturbées par le champ électromoteur et nous proposons une méthode simple pour accéder au champ de température moyen.

Nous insistons sur l'effet global de la dissipation Joule du courant électrique dans les couches de Hartmann. Nous montrons que cette dissipation varie en  $I^2 B$  et doit être prise en compte lors du dimensionnement de futures expériences à champ intense.

## Conclusion générale

Une couche cisailée de mercure est forcée de façon quasi-permanente à l'aide d'un courant électrique  $I$  et d'un champ magnétique continu  $B$ . Le champ moyen de vitesse ainsi que les propriétés de la turbulence générée par l'instabilité de la couche cisailée sont étudiés sur une large gamme de paramètres  $I$  et  $B$  (ou respectivement  $Re$  et  $Ha$ ).

On définit, à partir des distributions radiales de la vitesse azimutale, une épaisseur de couche parallèle turbulente  $\delta_{\parallel}$ . L'évolution spatiale de cette couche est donnée expérimentalement par la loi :  $\delta_{\parallel} \sim h(Ha/Re)^{-1/2.3}$ . Cette relation est similaire à celle prédite par la théorie laminaire,  $\delta_{\parallel} \sim h(Ha)^{-1/2}$ , au sens où le champ magnétique joue le même rôle : il tend à diminuer l'épaisseur de la couche. Nous comprenons bien que la turbulence tend au contraire à élargir la zone de mélange et c'est ce qui explique la présence du nombre de Reynolds dans la première relation.

Le moment cinétique global calculé à partir des mêmes distributions de vitesse confirme bien les prédictions du modèle quasi-2D Sommeria-Moreau (1982) pour des régimes d'écoulement où les effets faiblement 3D sont amortis. On observe que ces effets sont négligeables à faible vitesse, typiquement pour des valeurs de  $I$  en dessous de 20 A ( $Re \leq 10^6$ ). Pour des courants plus grands, ces effets deviennent relativement importants et on observe une saturation des courbes du moment cinétique pour des champs magnétiques inférieurs à 2 T. Cette saturation est attribuée au pompage d'Ekman qui transporte une fraction du moment cinétique vers la couche parallèle pariétale pour y être dissipée par viscosité. Au delà de 2 T, le pompage d'Ekman est

amorti par le champ magnétique et les profils du moment cinétique tendent, quelque soit la valeur de ce champ, vers une seule droite proche de celle prédite par le modèle quasi-2D. La non-dépendance du moment cinétique en fonction du champ constitue alors un bon test de quasi-bidimensionalité pour les écoulements MHD.

L'analyse spectrale de l'écoulement révèle la présence de structures cohérentes convectées par l'écoulement de base. Ces structures sont observables sous forme de pics à faibles nombres d'onde (ou à faibles fréquences) dans les spectres d'énergie cinétique. Ces pics sont suivis d'une zone auto-similaire en  $k^{-n}$  définie sur moins d'une décade de nombres d'onde. Pour des valeurs de  $Ha$  et  $Re$  inférieures respectivement à 150 et  $10^6$ , la pente de cette zone auto-similaire est proche de  $-5/3$ , et au delà de ces valeurs elle est proche de  $-3$ . Les structures cohérentes, dont l'échelle caractéristique est beaucoup plus grande que l'échelle caractéristique du foçage, ne peuvent, dans les deux cas ( $k^{-5/3}$  et  $k^{-3}$ ), être alimentées que par des échelles plus petites *via* un mécanisme de transfert inverse d'énergie. Les spectres en  $k^{-5/3}$  indiquent alors que la dynamique de l'écoulement est celle d'une turbulence 2D classique non MHD.

Les spectres en  $k^{-3}$ , qui en turbulence 2D sont associés à la cascade directe d'entrophie, sont attribués dans notre cas à l'équilibre quasi-stationnaire entre les transferts inertiels, dont le temps caractéristique est  $1/(k^3 E(k))^{1/2}$ , et la dissipation de Hartmann caractérisée par le temps  $\tau_H$  indépendant de  $k$ . L'égalité de ces temps implique nécessairement un spectre en  $k^{-3}$ . A partir de corrélations triples de la vitesse, des spectres de transfert, associés aux spectres d'énergie en  $k^{-5/3}$  et  $k^{-3}$  sont également calculés et confirment la présence d'un transfert inverse d'énergie.

Les propriétés de structures cohérentes sont également étudiées sur une large gamme de paramètres. Les intercorrélations de la vitesse azimutale montrent que l'échelle intégrale de l'écoulement varie en  $(Ha/Re)^{-1/2}$ . Cette loi confirme bien la loi d'évolution de l'épaisseur de la couche cisailée  $\delta_{||} \sim h(Ha/Re)^{-1/2.3}$ . Nous proposons alors un modèle simple, basé sur l'hypothèse de localité des transferts inertiels et de l'équilibre de ces transferts avec la dissipation de Hartmann dans la zone auto-similaire du spectre. Ce modèle prédit une loi en  $(Ha/Re)^{-1/2}$ .

La vitesse convective de ces structures est déterminée grâce à des intercorrélations spatio-temporelles de la vitesse radiale et montre qu'elle est linéaire en  $Re$  et ne dépend

pas de  $Ha$ . Ce résultat confirme une fois de plus le caractère bidimensionnel de l'écoulement.

Le champ de vorticité est reconstitu     partir des distributions des vitesses azimutale et radiale et permet de compter le nombre moyen de structures cohérentes pendant un temps donn  . On trouve que ce nombre varie en  $(Ha/Re)^{1/2.5}$ . On remarque alors que le nombre des strctures cohérentes est inversement proportionnel    leur taille.

Le paramètre adimensionnel qui contrôle la dynamique de l'écoulement de c  ur est le rapport  $Ha/Re$  (rapport des temps de dissipation de Hartmann et des effets inertiels). Ce nombre est  $Ha$  fois plus faible que le paramètre d'interaction  $N$  puisque dans le c  ur la densité de courant, de l'ordre de  $\sigma Bu/Ha$ , est  $Ha$  plus faible que celle dans les couches de Hartmann ( $\sim \sigma Bu$ ). Ceci qui implique que le rapport entre la force de Laplace et l'inertie dans le c  ur soit l'ordre de  $Ha/Re$  et non plus  $N = Ha^2/Re$ . Pour un ensemble de valeurs du rapport  $Ha/Re$  défini par [ $Ha \leq 150$  et  $Re \leq 10^6$ ], la dynamique de cette turbulence MHD est celle d'une turbulence 2D classique. Pour l'ensemble complémentaire des valeurs du rapport  $Ha/Re$  [ $150 < Ha \leq 1800$  et  $10^6 < Re \leq 3 \cdot 10^6$ ], la dissipation Joule dans les couches de Hartmann devient importante et change profondément la dynamique de l'écoulement.

**Perspectives.** Une étude statistique complète du champ de température s'impose. Elle permettrait de mieux comprendre l'effet du champ magnétique sur le transport d'un scalaire passif dans ces écoulements turbulents MHD. Nous savons maintenant que la zone de mélange devient plus petite quand le champ augmente ( $\sim 1/B^{1/2}$ ). Le cisaillement est de ce fait plus grand, mais en même temps, la dissipation d'énergie cinétique dans les couches de Hartmann est plus importante. Ceci conduit globalement    un taux de turbulence peu sensible au champ magnétique (figure 4.1, chapitre 4). La température serait alors m lang  e par la turbulence avec la même intensité mais sur une zone qui varie en  $1/B^{1/2}$ . Il semblerait alors probable que le nombre de Nusselt (convection+conduction/conduction) diminue quand le champ magnétique augmente.





## Bibliographie

- ALBOUSSIÈRE, T. NEUBRAND, A. C. GARANDET, J. P. & MOREAU, R. 1997 Segregation during horizontal Bridgman growth under an axial magnetic field. *J. Cryst. Growth* **181**, 133-144.
- ALBOUSSIÈRE, T. USPENSKI, V. & MOREAU, R. 1999 Quasi-2D turbulent shear layers. *Experimental Thermal and Fluid Science* **20**, 19-24.
- ALEMANY, A. MOREAU, R. SULEM, P. & FRISH, U. 1979 Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence. *J. Méc.* **18**, 277-313.
- ALEMANY, A.. 1978 *MHD à l'échelle du laboratoire. Quelques résultats, quelques applications*. Thèse d'état de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- BRITO, D. NATAF, H. C. CARDIN, P. AUBERT, J. & MASSON, J. P. 2000 Ultrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium. submitted to *Experiments in Fluids* **23**, 217-224.
- CITRINITI, J. H. & GEORGE, W. K. 1997 The reduction of spatial aliasing by long hot-wire anemometer probes. *Experiments in Fluids* **23**, 217-224.
- COLIN DE VERDIÈRE, A. 1979 Quasi geostrophic turbulence in a rotating homogeneous fluid. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **15**, 213.
- COUDER, Y. 1984 Two dimensional turbulence in a laboratory experiment. *J. Phys. Lett.* **45**, 353.
- CROCCO, L. & ORLANDI, P. 1985 A transformation for the energy-transfer term in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **16**, 405-424.

- DAVIDSON, P. A. 1997 The role of angular momentum in the magnetic damping of turbulence. *J. Fluid Mech.* **336**, 123-150.
- DAVIDSON, P. A. 1995 Magnetic damping of jets and vortices. *J. Fluid Mech.* **299**, 153-186.
- DAVOUST, L. COWLEY, M. D. MOREAU, R. & BOLCATO, R. 1999 Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field. *J. Fluid Mech.* **400**, 59-90.
- DAVOUST, L. 1996 *Convection naturelle MHD dans une cavité horizontale élançée*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- FRICH, U. 1995 *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- HINZE, J. O. 1959 *Turbulence*. Mc Graw-Hill.
- HUA, H. M. & LYKODIS, P. S. 1974 Turbulence measurements in a magneto-fluid-mechanic channel.. *Nuclear Sci. and Eng.* **54**, 445-449.
- HUNT, J. C. R. & LUDFORD, G. S. S. 1968 Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields Part 1. Obstacles in a constant area channel. *J. Fluid Mech.* **33**, 693-714.
- KLJUKIN, A. A. & KOLESNIKOV, Yu. B. 1989 MHD instabilities and turbulence in liquid metal shear flows. Proc. of the IUTAM Symposium 'Liquid Metal Magnetohydrodynamics', eds. J. Lielpeteris and R. Moreau, *Kluwer Acad. Press.* 449-454.
- KOLESNIKOV, Yu. & TSINOBER, A. B. 1972a An experimental study of two-dimensional turbulence behind a grid. *Fluid Dynamics* **9**, 621-624.
- KOLESNIKOV, Yu. & TSINOBER, A. B. 1974 Experimental investigation of study of two-dimensional turbulence behind a grid. *Izv. ANSSSR Mech. Zh. i Gaza* **4**, 146.
- KRAICHNAN, R. H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* **10**, 1417-1423.
- KRAICHNAN, R. H. 1971b Inertial range transfer in two and three dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **47**, 525-535.
- KRAICHNAN, R. H. & MONTGOMERY, D. 1980 Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics.* **43**.
- LENHERT, B. 1955 Instability of laminar flow of mercury caused by an external magnetic field. *Proc. Royal Soc. London* **A233**, 299
- LESIEUR, M. 1997 *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- LIELAUSIS, O. A. 1975 Liquid metal magnetohydrodynamics. *Atomic Energy Review* **13**, 527-581.
- MOFFATT, H. K. 1978 *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, New York.
- MOREAU, R. 1990 *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Press, Dordrecht.
- MÜCK, B. GÜNTHER, C. MÜLLER, U. & BÜHLER, L. 2000 Three-dimensional MHD flows in rectangular ducts with internal obstacles. To appear in the *J. Fluid Mech.*
- NGUYEN DUC, J. M. 1988 *Instabilité et turbulence dans des écoulements bidimensionnels MHD*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- NGUYEN DUC, J. M. & SOMMERIA, J. 1988 Experimental characterization of steady two-dimensional vortex couples. *J. Fluid Mech.* **192**, 175-192.
- PARET, J. & TABELING, P. 1997 Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4162-4165.
- PARET, J. & TABELING, P. 1998 Intermittency in the 2D inverse cascade of energy: experimental observations. *Phys. Fluids* **10**, 3126-3136.
- POTHÉRAT, A. SOMMERIA, J. & MOREAU, R. 1999 An effective 2D model for MHD flows with transverse magnetic field. To appear in the *J. Fluid Mech.*
- SOMMERIA, J. 1980 *Tendance à la bidimensionalité de la turbulence MHD*. Thèse de troisième cycle de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- SOMMERIA, J. & MOREAU, R. 1982 Why, how and when MHD turbulence becomes two-dimensional? *J. Fluid Mech.* **118**, 507-518.
- SOMMERIA, J. 1983 Two dimensional behaviour of MHD fully developed turbulence. *J. Méc. numéro spécial turbulence 2D*, 169.
- SOMMERIA, J. 1985 *Sur la turbulence bidimensionnelle : Une approche par la magnétohydrodynamique*. Thèse d'état de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- SOMMERIA, J. 1986 Experimental study of two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.* **170**, 139-168.
- TENNEKES, H. & LUMLEY, J. L. 1972 *A first course in turbulence*. Massachusetts, MIT Press.
- Wyngaard, J. C. 1968 Measurement of small-scale turbulence with hot wires. *J. Scientific Instruments*. **1**, 1105-1108.

ZIKANOV, O. & THESS, A. 1998 Direct numerical simulation of forced MHD turbulence at low magnetic Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **358**, 299-333.

## Liste des figures

Figure 2.1 : Synoptique général de l'expérience MATUR

Figure 2.2 : Schéma de la cellule expérimentale MATUR

Figure 2.3 : Vue de dessus de la paroi inférieure

Figure 2.4 : Mesures des potentiels électriques

Figure 2.5 : Mesures des températures par thermocouple

Figure 2.6 : Vitesse "vraie"  $u^t$  et vitesse mesurée  $u$  entre deux fils de platine

Figure 2.7 : Influence du champ électromoteur  $u \times B$

Figure 2.8 : Signaux filtrés à 10 Hz de  $u_\theta$  et  $T$

Figure 2.9 : Vue en coupe d'une sonde coaxiale

Figure 2.10 : Directions de propagation de l'onde ultrasons

Figure 2.11 : Ecart relatifs  $U_1 - U_2 / U_1 (\%)$  entre deux séries de mesures pour deux valeurs de champ et deux valeurs du courant.

Figure 2.12 : Schéma du circuit électrique équivalent

Figure 2.13 : Evolution de la résistance  $R_{Hg}$  en fonction du courant électrique et du champ magnétique

Figure 2.14 : Evolution de la Puissance fournie au mercure  $P_{Hg}$  en fonction du courant injecté  $I$  (a) et du champ magnétique  $B$  (b)

Figure 2.15 : Puissance fournie compensée  $P_{Hg} \times I^{-2} B^{-1}$  en fonction de  $IB$  suggérant la loi  $P_{Hg} = 1.4 \cdot 10^{-3} \times I^2 B$ . Comparaison avec le modèle (éq. 52)

Figure 3.1 : Signaux de vitesses mesurés dans la couronne extérieure en régime transitoire : comparaison avec la solution du modèle laminaire

Figure 3.2 : Profils radiaux de la vitesse moyenne angulaire

Figure 3.3 : Exemple de construction servant à définir l'épaisseur de la couche cisailée libre.

Figure 3.4 : Evolution de l'épaisseur de la couche cisailée libre  $\delta_{||}$

Figure 3.5 : Evolution du moment cinétique  $L$  en fonction du courant injecté  $I$  pour différents champs magnétiques  $B$ .

Figure 3.6 : Profils verticaux de la vitesse azimutale

Figure 4.1 : Distributions radiales des RMS.

Figure 4.2 : Exemple d'interpolation d'un signal spatial  $u_\theta(x)$  déduit d'un signal temporel  $u_\theta$

Figure 4.3 : Spectre spatial et spectre temporel calculés à partir des signaux ci-dessus

Figure 4.4 : Spectres temporels linéaires de  $u'_\theta$  à  $r \simeq 68.5$  mm.

Figure 4.5 : Spectres spatiaux log-log compensés  $k^3 E(k)$

Figure 4.6 : Spectre d'énergie schématique d'une turbulence 2D forcée

Figure 4.7 : Exemple de spectre de transfert  $T(k)$  et spectre d'énergie associé  $E(k)$

Figure 4.8 : Exemple de fonctions d'inter-corrélation

Figure 4.9 : Signaux de  $u_\theta$  mesurés à l'intérieur et à l'extérieur de la couche cisailée

Figure 4.10 : Evolution du logarithme de l'échelle intégrale compensée  $l_\theta \times Re^{-1/2}$  et  $l_\theta \times Ha^{1/2}$  en fonction du logarithme de  $Re$  et de  $Ha$

Figure 4.11 : Signaux typiques de  $u'_\theta$  et  $u'_r$  filtrés à 5 Hz.

Figure 4.12 : Inter-corrélations spatio-temporelles  $Int(m_j)$

Figure 4.13 : Evolution de la vitesse de transit des structures cohérentes  $V_S = \Omega_S \times R_1$  en fonction de  $B$  et  $I$

Figure 4.14 : Exemples de spectres temporels en représentation linéaire calculés dans la couche cisailée

Figure 4.15 : Spectres temporels d'énergie calculés pour différentes positions radiales

Figure 4.16 : Champ de vitesse sur un tour et champs de vorticité sur 6 tours obtenus pour  $B = 5$  T et  $I = 20$  A.

Figure 4.17 : Champ de vitesse sur un tour et champs de vorticité sur 6 tours obtenus pour  $B = 6$  T et  $I = 20$  A.

Figure 4.18 : (a). Evolution du nombre des structures cohérentes  $N_S$  avec  $B$  et  $I$ . (b). Rapport entre le temps inertiel et de dissipation dans les couches de Hartmann  $\tau_{tu}/\tau_H$  en fonction de  $B$  et  $I$ . (c)

Figure 5.1 : Exemple de spectres de fluctuations de la température pour  $B = 1$  T et  $I = 30$  A en différents points dans la couche cisailée.

Figure 5.2 : Exemple de distributions radiales de la température moyenne pour  $B = 1$  T obtenues pour différentes intensités du courant. (a) : température apparente sans plot chauffant. (b) : température réelle sans plot chauffant. (c) : température apparente avec plot chauffant.

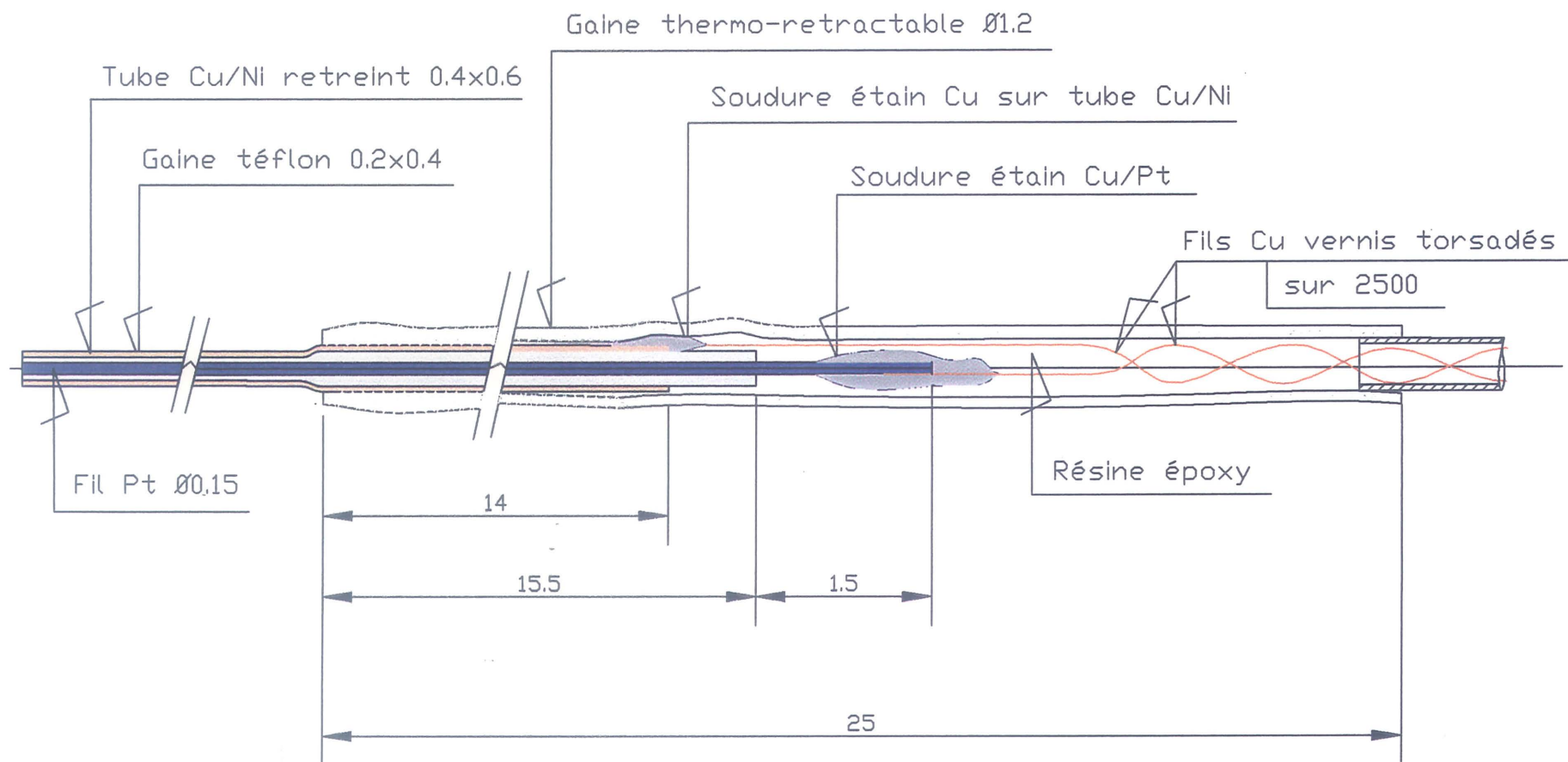


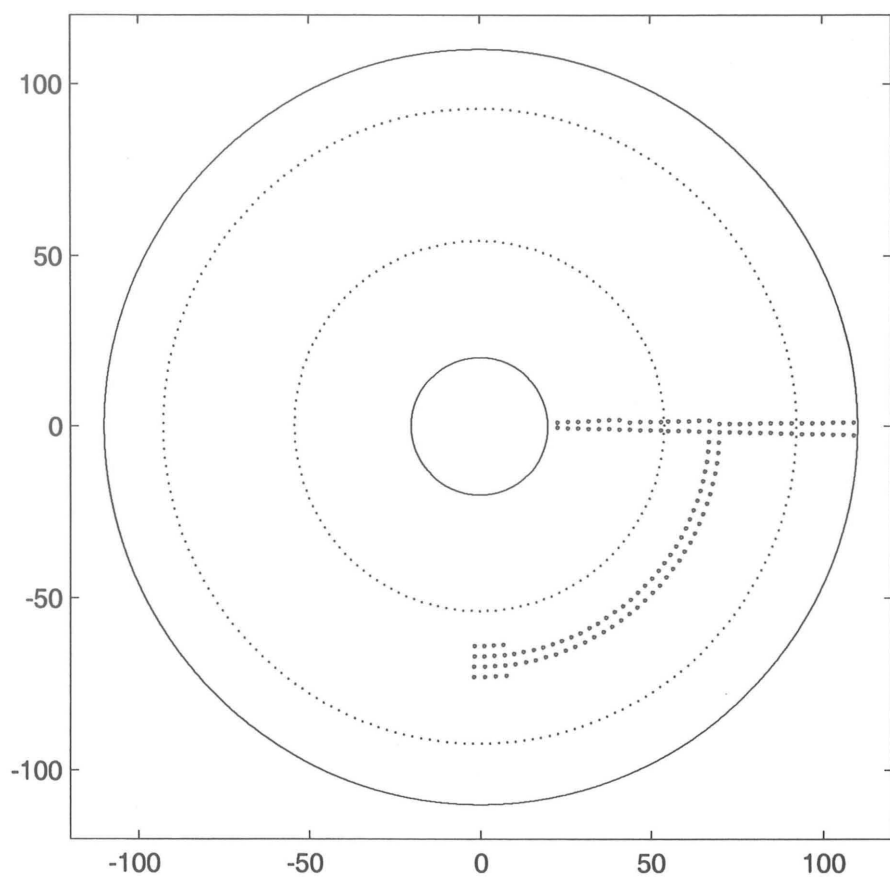


# Annexe 1

Détails de conception de la sonde mixte

Positions des sondes

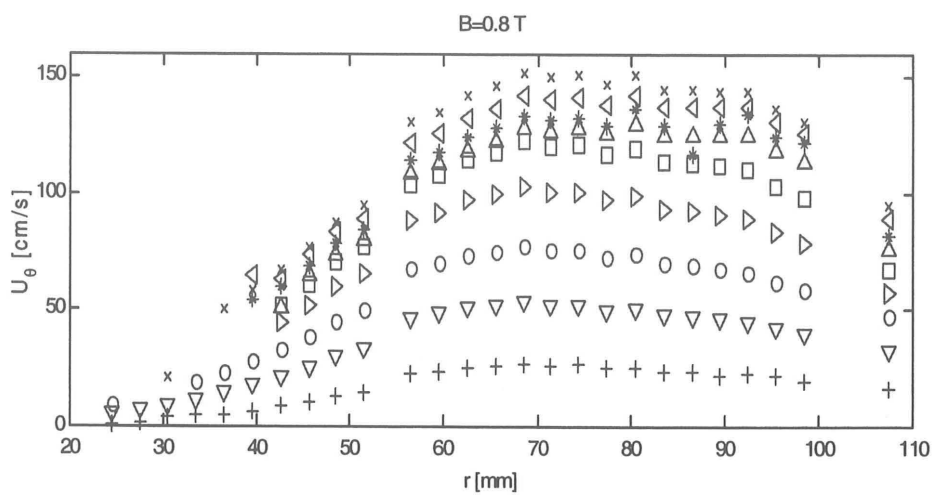
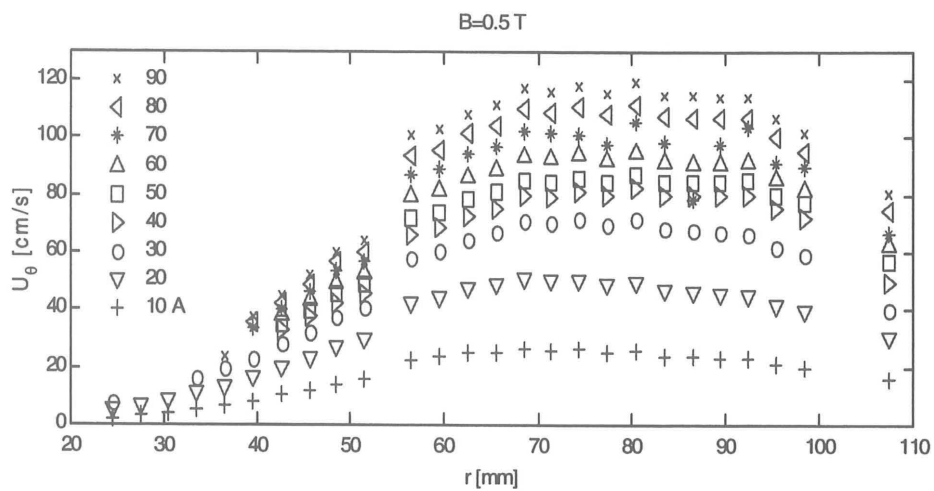


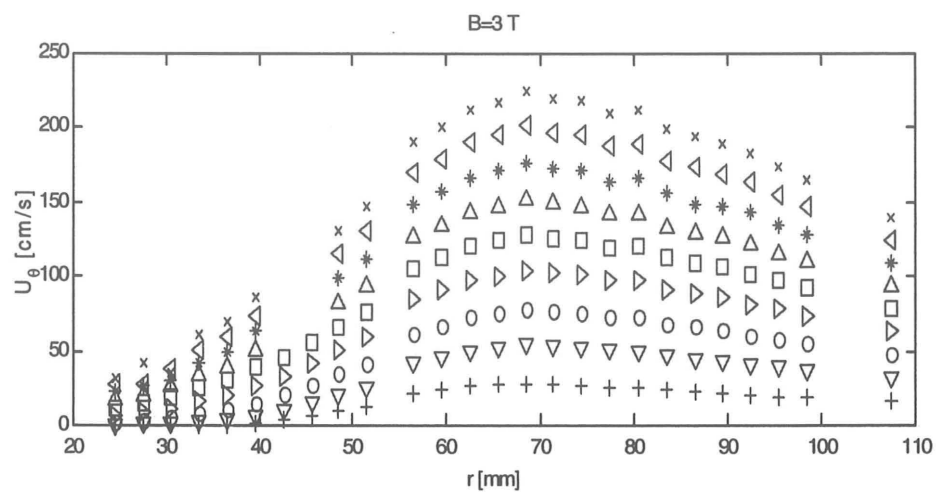
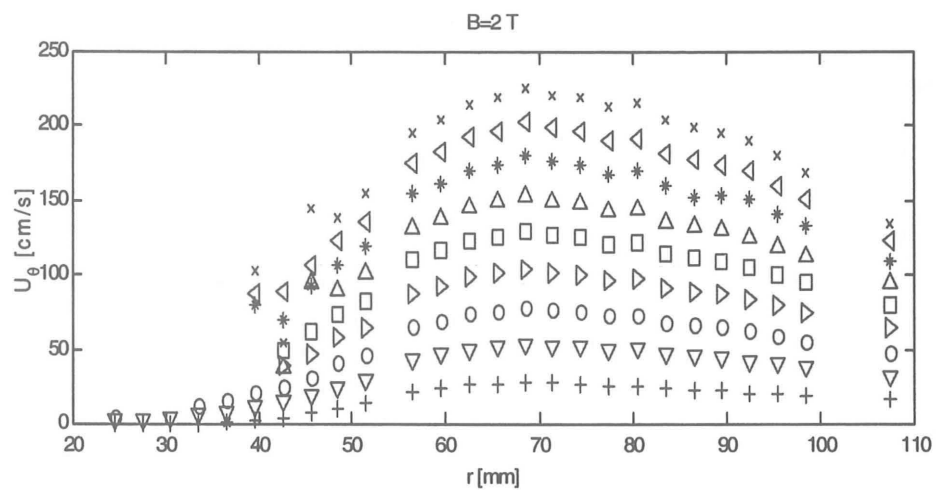




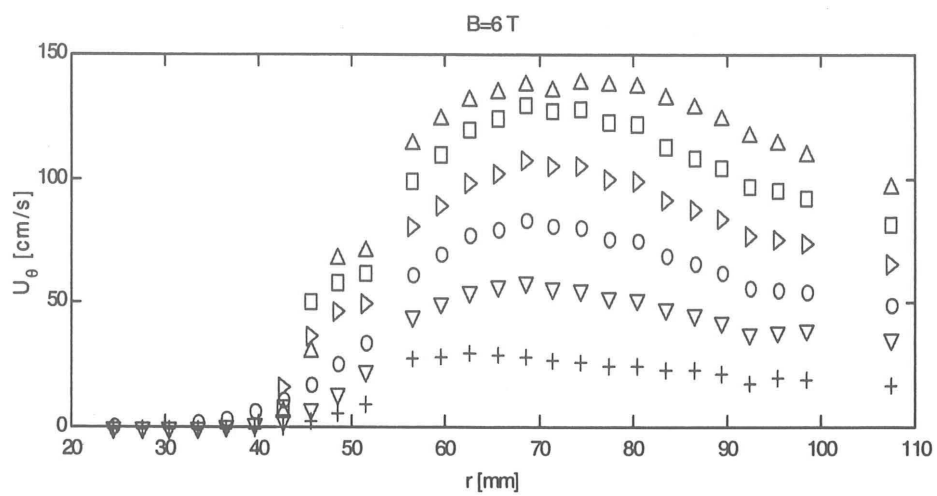
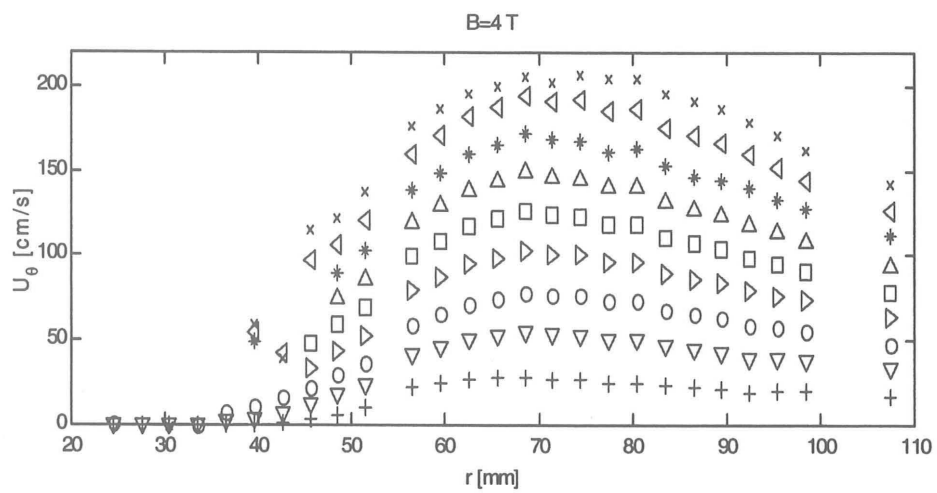
## Annexe 2

Profils de vitesse azimutale pour différentes valeurs du courant  $I$  et du champ  $B$ .



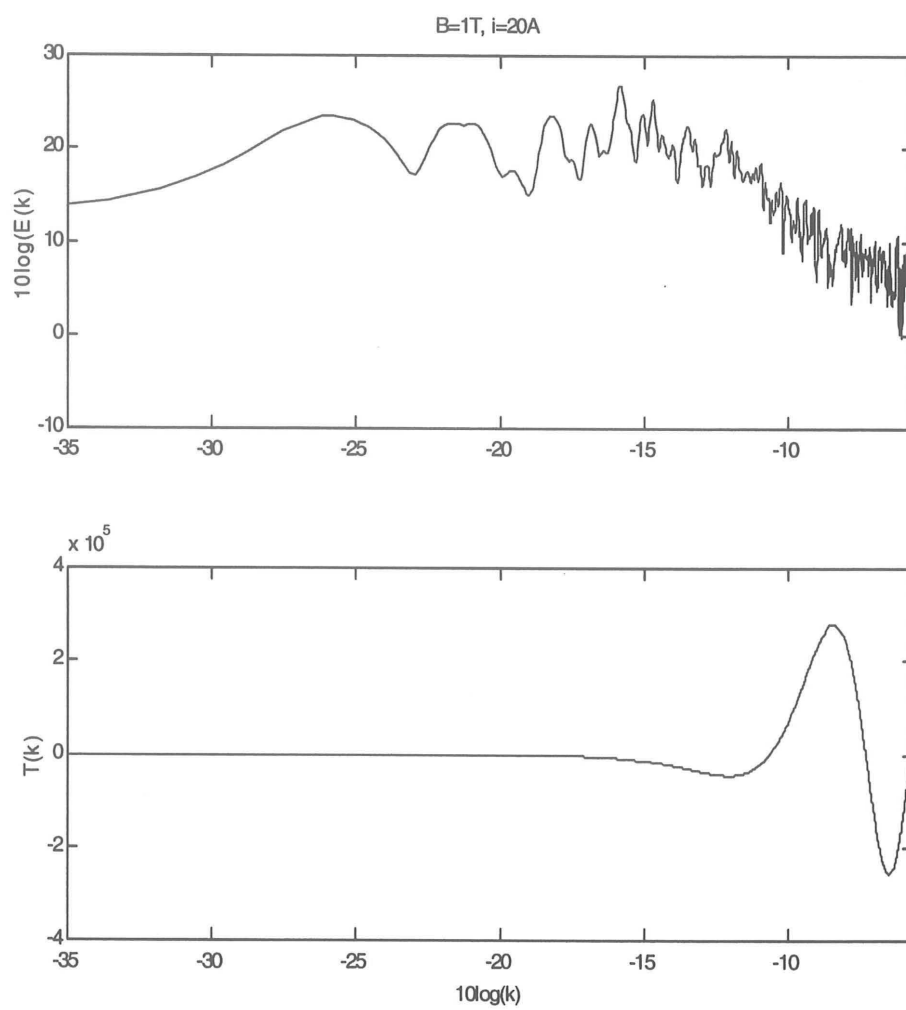


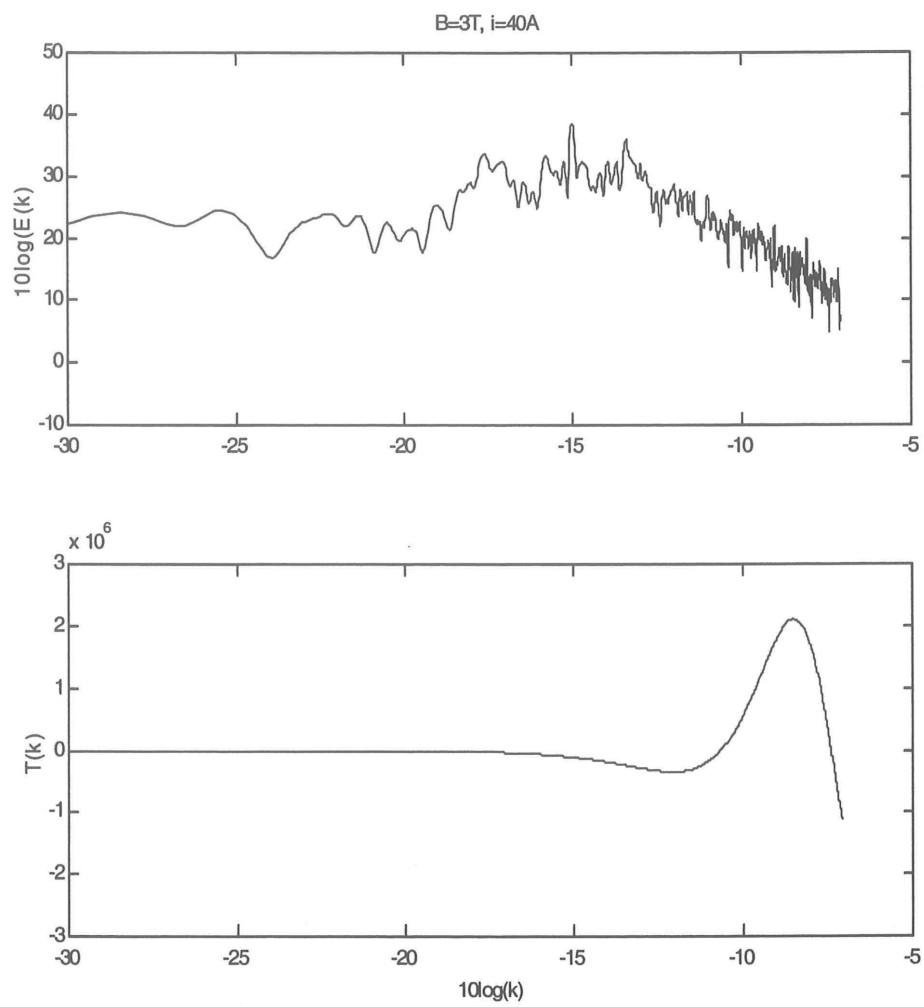


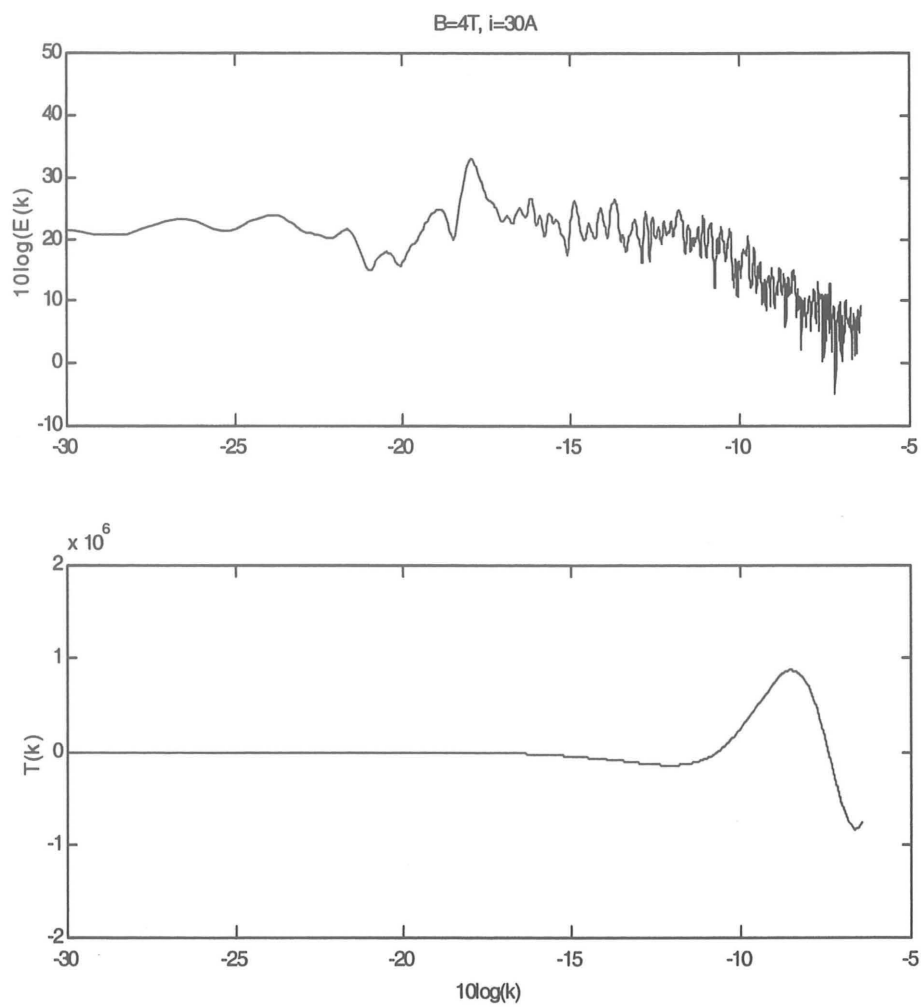


## Annexe 3

Exemples de spectres de transferts  $T(k)$  et de spectres d'énergie  $E(k)$

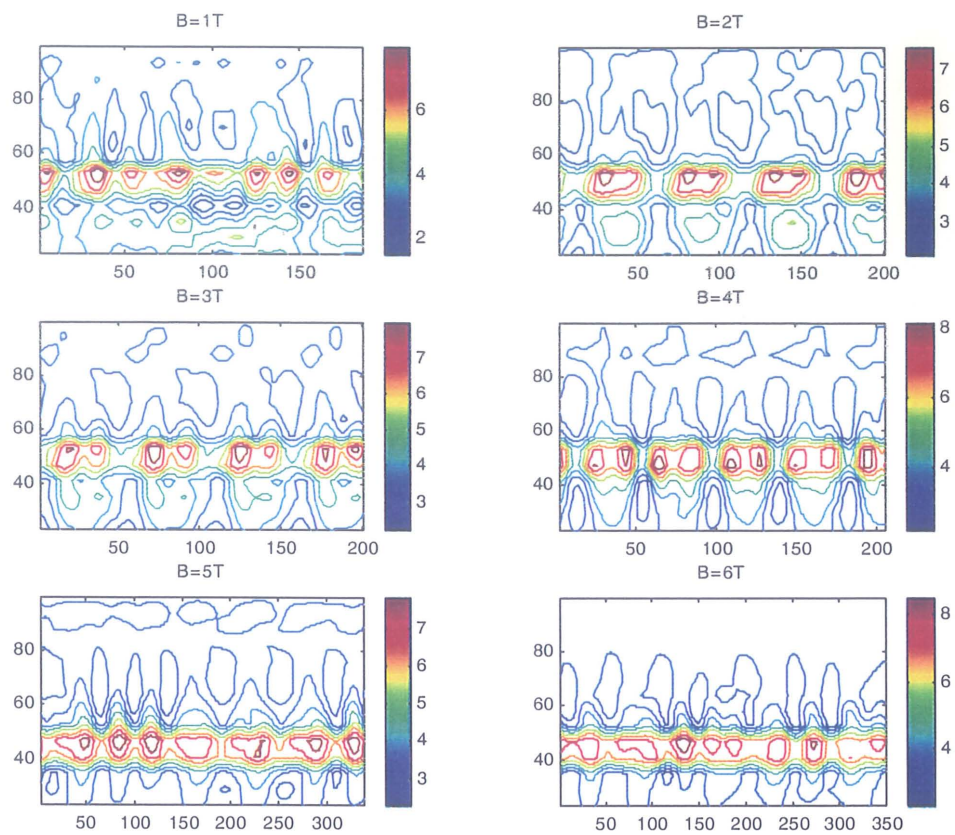






## Annexe 4

Champ de vorticité instantané pour deux valeurs du courant (10 et 30 A) et six valeurs de champ (1 à 6 T).



$$I = 10 \text{ A}$$

$$I = 30 \text{ A}$$





## Annexe 5

Article soumis au J. Fluid. Mech.



# An experimental investigation of MHD quasi-2D turbulent shear flows

K. Messadek and R. Moreau

Laboratoire EPM-MADYLAM, CNRS UPR A9033

ENSHMG, BP 95, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France

## Abstract

An extensive experimental work is carried out to examine the properties of a quasi-2D MHD turbulent shear flow. An axisymmetric shear of a mercury layer is forced under the action of a steady vertical magnetic field and a radial horizontal electric current flowing between a ring set of electrodes and a cylindrical wall. This shear layer is unstable and the properties of the turbulent flow are studied for a wide range of Hartmann (up to 1800) and Reynolds numbers (up to  $10^6$ ). The mean velocity profiles exhibit a turbulent free shear layer whose thickness is by two orders of magnitude larger than that predicted by the laminar theory. They provide the expected linear dependence between the total angular momentum and the electric current, when the magnetic field is large enough, but they demonstrate a systematic deviation when it is moderate ( $Ha \lesssim 250$ ). The quasi-2D turbulence is characterized by an energy transfer towards the large scales which yields to a relatively small number of large coherent structures. The properties of these structures result from the competition between the energy transfer and the Joule dissipation within the Hartmann layers. In the intermediate range of wave numbers ( $k_\ell < k < k_i$ , where  $k_\ell$  is the integral length scale wave number and  $k_i$  the injection wave number), the energy spectra exhibit a close-to  $k^{-5/3}$  power law when the Joule dissipation is weak and a close-to  $k^{-3}$  when it is significant. The properties of the turbulent flow in this later regime only depend on one non-dimensional parameter, the ratio  $\frac{Ha}{Re} \left( \frac{l_\perp}{h} \right)^2$  ( $Ha$  is the Hartmann

number,  $Re$  is the Reynolds number based on the cell radius,  $l_{\perp}$  is a typical transverse scale and  $h$  the layer width).

## 1 Introduction

The tendency of MHD flows at the laboratory scale where the magnetic Reynolds number is much smaller than unity ( $R_m = \mu\sigma UL \ll 1$ ,  $\mu$  denotes the magnetic permeability,  $\sigma$  the electrical conductivity,  $U$  and  $L$  are typical velocity and length scale respectively) to form quasi-2D structures is now well understood (e.g. Moreau, 1990). MHD flows submitted to a sufficiently strong uniform magnetic field (flows around bodies, Hunt and Ludford, 1967, Mück *et al.* 2000, buoyancy-driven flows, Alboussière *et al.*, 1997, Davoust *et al.*, 1999) exhibit this behavior which may be understood as a reminiscence of the Alfvén waves propagation when  $R_m$  becomes very small. Sommeria and Moreau (1982) showed that this Alfvén wave propagation degenerates into a unidirectional diffusion in the magnetic field direction with a magnetic diffusivity  $D_m = \frac{\sigma B^2}{\rho} l_{\perp}^2$ . The time scale characteristic of the establishment of the two-dimensionality between Hartmann walls which are  $h$  apart is  $\tau_{2D} = \frac{\rho}{\sigma B^2} \frac{h^2}{l_{\perp}^2}$  ( $B$  stands for the magnetic field intensity and  $\rho$  for fluid density). Notice that the first qualitative experimental evidence of this behavior was given by Lehnert (1955) more than 30 years ago.

In the particular case of turbulence, the tendency of an initially 3D turbulent flow to become two-dimensional has first been observed by Kolesnikov and Tsinober (1972). But the most specific experiment made to investigate this phenomenon was performed by Alemany *et al.* (1979), who suggested a first theoretical interpretation and derived the main scaling laws, in particular the ratio between the parallel and perpendicular lengths scales, evolving with time (or with distance from the grid generating the turbulence) as  $\frac{l_{\parallel}}{l_{\perp}} = \left(\frac{\sigma B^2 t}{\rho}\right)^{1/2}$ . They also performed a numerical modelling of the development of this anisotropy, based on an EDQNM formulation adapted to the MHD equations in good agreement with the experimental results. Davidson (1997) stated that this evolution towards a quasi-2D regime is a consequence of the invariance of the component of the angular momentum parallel to the magnetic field, whereas the perpendicular components decay exponentially [ $\simeq \exp \frac{\sigma B^2 t}{\rho}$ ].

Neither these experiments (e.g. Alemany *et al.*, 1979), nor the theories (Alemany *et al.*, 1979 and Davidson, 1997) did not consider the Hartmann walls which are likely to limit the elongation of the turbulent eddies in the magnetic field direction. Therefore, in these

first investigations, the induced electric current cannot be zero, and the energy decay by Joule effect remains important and leads finally to a full suppression of the turbulence. On the contrary, in the presence of insulating Hartmann walls, the two-dimensionality may be well established after the time  $\tau_{2D}$  (Sommeria and Moreau, 1982). The electric current within the core of the turbulent flow cancels out and the only remaining dissipation takes place within the thin Hartmann layers present at both ends of the eddies. The thickness of this layer in which the velocity goes exponentially to zero is  $\frac{1}{B}\sqrt{\frac{\rho\nu}{\sigma}}$  ( $\nu$  denotes viscosity which controls the dissipation at the same rate as the electric resistivity). The Hartmann layer damping time scale  $\tau_H = \frac{h}{B}\sqrt{\frac{\rho}{\sigma\nu}}$  (Sommeria and Moreau, 1982) may be much longer than the Joule time scale of an initially isotropic turbulence  $\tau_J = \frac{\sigma}{\rho B^2}$ . Therefore, a high level of quasi-steady 2D turbulence persists during a very long time as evidenced by Lielausis (1975). The turbulence level and its properties must be such that they allow a global balance between the energy input due to the instability of the mean flow and the Hartmann dissipation.

The experimental evidence of an inverse energy cascade a quasi-2D and almost homogeneous turbulence was given by Sommeria (1986). The only existing shear in the flow was located along the wall parallel to the magnetic field within a thin layer, where accurate measurements were difficult to realize. So far, the only experiments on MHD turbulent shear flows are those performed by Kljugin and Kolesnikov (1989). They provide interesting data concerning the mean velocity distributions and correlations of velocity fluctuations. Yet, no information about the energy spectra and the development of coherent structures fed by the energy transfer toward the large scales is available. Experimental data should be of a great interest to understand the physics of these quasi-2D MHD turbulent shear flows and check the validity of the recent theoretical attempts (Poth  rat *et al.*, 2000, M  ck *et al.*, 2000). This is precisely the purpose of the MATUR (Magnetohydrodynamic Turbulence) experiment, built in Grenoble. The first results obtained from MATUR under a moderate magnetic field ( $B = 0.17$  Tesla (T)), have been presented at the Turbulent Shear Flow Conference (1997) and recently published in Alboussi  re *et al.* (1999).

The main objectives of the present paper are first to provide unique experimental data on MHD turbulent shear flows in a wide range of  $Ha$  ( $B$  from 0.5 to 6 T) and  $Re$  ( $I$  from 10 to 70 Amp) numbers, of great interest to validate either numerical or theoretical predictions, and second, to highlight the important role of the Hartmann layer which dissipate the kinetic energy by Joule effect and viscosity. It is shown that, when it is predominant upon the dissipation within the other boundary layers (along walls parallel

to the magnetic field), at each wave number within the inertial range, this Hartmann dissipation balances the inertial inverse flux of energy. This results in the  $k^{-3}$  energy spectra.

A short description of the apparatus and the flow conditions in the MATUR cell is given in section 2. A particular attention is given to the modifications dealing with the high magnetic field (other informations can be found in Alboussière *et al.* ()). Some comments on the diagnostic technique and the data acquisition system are also presented.

Section 3 presents an analysis of the relevant time scales highlighting the specific interest of the high magnetic field. The main properties of the mean flow in the unsteady as well as in the quasi-steady regimes are described and discussed in section 4 and the properties of the turbulent velocity fluctuations in the quasi-steady regime are analyzed in section 5, before some concluding remarks.

## 2 The experimental set-up

### 2.1 General description

The MATUR cell is a trunk of circular cylinder of vertical axis, with an internal radius  $R = 11$  cm and a depth  $h = 1$  cm, full of mercury (see fig. 1). The bottom plate is electrically insulating, except where small electrodes are inserted. The upper surface is an electrically insulating cover with a mechanism to fill in the mercury after a careful cleaning of the cell. The cylindrical wall is made of copper and maintained at a constant and well controlled temperature by a water-cooling system. The internal surface of the wall is protected from mercury with an electrochemical deposit of nickel. A final gold coating on this surface, used as a cathode, insures a good electric contact with the mercury.

Very small electrodes (1 mm diameter and 1.42 mm apart) have been inserted in the bottom plate through holes machined along two concentric circles located at 5.4 cm (medium electrodes) and 9.3 cm (external electrodes) from the cell center. One of the two circles is used as the anode. A precisely controlled DC current is supplied by a current generator and passes through the mercury from the anode to the wall. A special care is taken so that the parallel circuits between the generator and each electrode have exactly the same electric resistance, leading to a uniformly distributed electric current along the electrode-ring. The use of a large number of small electrodes instead of a continuous electrode-ring is essential to avoid an electrically conducting circuit at a given electric potential (continuous electrode-ring would induce a strong local damping, whereas this

effect is minimized at the scale of each individual electrode). Provided the Hartmann number is large enough ( $Ha \gg 1$ , this is always the case), the electric current intensity  $I$  divides in two equal parts (this partition takes place within the free shear layer located just above the electrodes) crossing the two symmetric Hartmann layers. Therefore, the fluid annular domain located between the selected circular electrodes and the cathode ( $R_{inj} < r < R$ ) is driven in rotation by the Lorentz force, while the central fluid domain ( $0 < r < R_{inj}$ ) is entrained by friction within the free shear layer. It is one of the well established properties of the Hartmann layer that the core mean velocity  $U_\theta$  is proportional to the current per unit length within the Hartmann layer ( $I/4\pi r$ ), so that:

$$U_\theta = \frac{I}{4\pi r \sqrt{\sigma \rho \nu}}. \quad (1)$$

Therefore, the electric current  $I$  appears as the main control parameter while the magnetic field  $B$  mainly acts at establishing the two-dimensionality within the core and controlling the dissipation within the Hartmann layers. Between the moving fluid annulus and the internal fluid domain, there should have a thickness varying as  $h Ha^{-1/2}$  according to the laminar theory (Hunt and Ludford, 1967). But, in this range of parameters ( $I \gtrsim \text{few Amp}$ ), instabilities develop across this layer where the Joule damping is quite limited because of the quasi-two-dimensionality. These instabilities are the source of the turbulence. In fact, the MATUR experiment might be useful to observe and characterize this instability, but this is not the purpose of this paper. It is clear, however, from our measurements, instability starts for quite small values of the electric current ( $I \lesssim 1 \text{ Amp}$ ) and that above 10 Amp a well-established turbulent regime sets in.

The central part of the bottom plate is made of thick copper (4 cm diameter), electrically insulated from the mercury and may be uniformly heated at a given power. This allows to investigate the turbulent transport of a scalar quantity such as temperature from the central part of the cell towards the external wall maintained at a constant temperature.

## 2.2 Measurement techniques

The velocity measurements are performed with a large number of electric potential probes (up to 140 as shown in figure 1) inserted within the bottom plate. In fact, it is well known that, when  $Ha \gg 1$ , the electric potential only suffers a negligible variation both through the quasi-2D core and the Hartmann layers. Therefore, the probes located in the plane of the Hartmann wall plane see the same electric potential as if they were in the turbulent core flow. Actually, the electrodes and probes have some non-negligible



influence, because they yield a non-zero electric conductance to the wall and contribute to some extra damping of the flow. This effect, which is quite small, because the Hartmann number based on the electrodes/probes diameter is small, is accepted. In fact, there is a tendency to form some MHD columns similar to the Taylor columns at the scale of each electrode, but their diameters are so small that these columns cannot extend from one Hartmann wall to the other. If they would stay imbedded within the Hartmann layer, their influence would remain negligible

The key idea of the measuring technique is the property of MHD quasi-2D core flows, according to which Ohm's law reduces, at the first order of  $Ha^{-1}$ , to  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Besides, across the Hartmann layer the electric potential has a negligible variation of the order of  $Ha^{-2}$  (Moreau, 1990). Then, the two components of the core velocity  $\mathbf{u}$ , can be derived from the two components of the local electric field using the relation

$$u_r, u_\theta = \frac{1}{B} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (2)$$

where  $u_\theta$  and  $u_r$  are respectively the angular and the radial components,  $\theta$  and  $r$  the angular and radial coordinates,  $\varphi$  is the electric potential. This technique is quite accurate especially for high magnetic field intensity  $B$ , where the signal to noise ratio is above 100. The output signal is systematically amplified thanks to a very low-noise amplification system available in our laboratory (see Davoust *et al.*, 1999). Notice that this diagnostics has no inertia since the electric potential at the wall instantaneously follows the fluid velocity and does not require any calibration.

We also made a comparison of these velocity measurements with a ultrasonic Doppler velocity measurements technique, which allowed to check the quasi-two-dimensionality of the flow and confirmed the validity of our measurement procedure.

### 3 The specific interest of a high magnetic field

In the present experiment, at least five important phenomena may be distinguished, whose specific time scales are as follows: the development of the anisotropy induced by Joule damping ( $\tau_J = \frac{\rho}{\sigma B^2}$ ), the establishment of the two-dimensionality ( $\tau_{2D} = \frac{\rho}{\sigma B^2} \frac{h^2}{l_\perp^2}$ ), the energy transfer between transverse scales ( $\tau_{tu} = \frac{l_\perp}{U}$ ), the Hartmann dissipation within the Hartmann layers ( $\tau_H = \frac{h}{B} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma \nu}}$ ) and the viscous effects ( $\tau_\nu = \frac{l_\perp^2}{\nu}$ ). Table here after gives the order of magnitudes of these time scales for two values of  $B$  (0.5 and 5 T), the velocity and the length scales are kept constant ( $U = 0.1$  m/s,  $l_\perp = 10$  cm and  $h = 1$

cm). The merits of the high magnetic fields appear quite clearly, since the establishment of the two-dimensionality is almost instantaneous ( $\tau_{2D} \ll \tau_{tu}$ ) and the viscous effects are negligible ( $\tau_{tu} \ll \tau_\nu$ ). The only relevant phenomena are then the energy transfer between the different scales (time scale  $\tau_{tu}$ ) and the Hartmann dissipation (time scale  $\tau_H$ ). This explains that the properties of the turbulent flow in this regime only depend on one basic non-dimensional parameter, namely the ratio

$$\frac{\tau_{tu}}{\tau_H} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B h \frac{\nu}{u l_\perp} \frac{l_\perp^2}{h^2} = \frac{Ha}{Re} \left( \frac{l_\perp}{h} \right)^2, \quad (3)$$

as mentioned in a number of previous papers (Lielausis, 1975, Sommeria & Moreau, 1982).

This parameter is proportional to  $Ha/Re$  since the current density within the core ( $\sim \sigma Bu/Ha$ ) is  $Ha$  times smaller than that within the Hartmann layer ( $\sim \sigma Bu$ ). The ratio between Lorentz force and inertia in the turbulent core is therefore of the order of  $Ha/Re$  (and not of the order of  $N = \frac{Ha^2}{Re}$ , the interaction parameter).

One may consider that, when the ratio  $\tau_{tu}/\tau_H$  is small, the dissipation is small enough to let the energy transfer almost unchanged all along the inertial range. Then, the energy spectrum is that of the expected inverse energy cascade exhibiting a  $k^{-5/3}$  power law. On the other hand, when the ratio  $\tau_{tu}/\tau_H$  is large, the dissipation is significant at all relevant scales, so that the energy flux through the cascade cannot be constant. Then, even with an energy transfer towards the large scales, a Kolmogorov cascade is impossible. The energy level at any wave number  $k$  is controlled by the competition between the local inertial transfer mechanism ( $\tau_{tu} \sim 1/\sqrt{k^3 E(k)}$ ) and the local dissipation in the Hartmann layers ( $\tau_H = \frac{h}{B} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma\nu}}$  which is  $k$ -independent). The equilibrium between  $\tau_{tu}$  and  $\tau_H$  suggests a  $k^{-3}$  energy spectrum at wave numbers smaller than the forcing wave number  $k_i$ . Notice that such a  $k^{-3}$  energy spectrum, corresponds to an inverse energy cascade modified by the Hartmann damping and not to a direct enstrophy cascade as will be pointed out in section 5.2. One may therefore consider that the high magnetic fields are of a very special interest since they provide the possibility of simple dimensional argument in the interpretation of the dominant phenomena.

	$B = 0.5 \text{ T } (Ha = 150)$	$B = 5 \text{ T } (Ha = 1500)$
$\tau_J = \frac{\rho}{\sigma B^2} \text{ (s)}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
$\tau_{2D} = \frac{\rho}{\sigma B^2} \frac{h^2}{l_1^2} \text{ (s)}$	$10^{-1}$	$10^{-3}$
$\tau_{tu} = \frac{l_1}{U} \text{ (s)}$	1	1
$\tau_H = \frac{h}{B} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma \nu}} \text{ (s)}$	10	1
$\tau_\nu = \frac{l_1^2}{\nu} \text{ (s)}$	$10^3$	$10^3$

Key time scales

## 4 Properties of the mean flow

### 4.1 The unsteady regime

In this section the velocity field during the unsteady phase after a sudden application of the electric current is characterized. Three angular temporal velocity signals measured in the outer region ( $r > R_{inj}$ ) are displayed in figure 2. Three different zones may be defined.

The first zone corresponds to the acceleration of the liquid in a laminar regime, the dashed line between zone 1 and 2 corresponds to the transition from the laminar regime to a turbulent regime due to the instability of the shear layer. This kind of shear flows, which exhibit an inflectional mean velocity profile, is well known to be strongly unstable. In zone 2, the acceleration of the fluid shows two important features. The first one is the birth of vortices and the second is concerned with the interactions between them. The third zone corresponds to the ultimate regime of fluid flow with unsteady quasi-2D vortices. The turbulent signal in this zone is more intermittent than the one in zone 2 and could give an information about the large eddies typical length scale.

The evolution of the mean angular velocity during this unsteady regime may be predicted analytically using a laminar model. Assuming that the electric current and the fluid velocity have one non-zero component  $j_r$  and  $U_\theta$ , the functional dependence of  $j_r$  and  $U_\theta$  in the external fluid annulus can be expressed as:

$$j(r, z, t) = j_{Ha}(r, t) \exp(-Ha \frac{z}{h}) + j(r, t), \quad (4)$$

$$U(r, z, t) = U_\theta(r, t)(1 - \exp(-Ha \frac{z}{h})). \quad (5)$$

where  $U_\theta$  is the mean angular velocity of the core flow,  $z$  the coordinate parallel to  $B$  and  $j$  the electric current in the core flow.

The property of the Hartmann layer yields to

$$j_{Ha}(r, t) = -\sigma B U_\theta(r, t). \quad (6)$$

The total electric current between the electrodes and the external wall is

$$I = 2\pi r h j(r, t) + 2\pi r h \frac{j_{Ha}(r, t)}{Ha}. \quad (7)$$

Now, the Navier-stokes equation in the core flow, neglecting the convective and viscous terms, reduces to

$$\rho \frac{\partial U_\theta}{\partial t} = -j_c B. \quad (8)$$

We end up with four algebraic equations (4)-(7) and one differential equation (8) for 5 unknowns, with the initial condition:  $U_\theta = 0$  at  $t = 0$ . The solution for the core mean velocity in the presence of two symmetric Hartmann layers is

$$U_\theta(r, t) = \frac{I}{4\pi r \sqrt{\sigma \rho \nu}} (1 - \exp(-\frac{\nu Ha}{h^2} t)). \quad (9)$$

The mean velocity  $U_\theta(t)$  is plotted in figure 2 for three values of  $r$  and is compared to the experimental results in the same conditions. A good agreement is noticed both at the beginning of zone 1 (initial acceleration) and during the quasi steady regime (zone 3). The initial agreement is due to the fact that the non-linear terms of the Navier-Stokes equation are still negligible in this final phase. In particular, this agreement confirms the relevance of the simplified equation (8) where  $j$  is derived from the Hartmann layer theory. However, the model underestimates the mean velocity in zone 2 when the instability develops, probably because the non-linear effects are not taken into account in this model. Notice that, as the exponential term of eq. (9) vanishes, the core velocity in zone 3 is only dictated by the electric current within the Hartmann layers.

## 4.2 The free shear layer

A sample of radial profiles of the mean angular velocity in the quasi-steady regime are presented in figure 3. These profiles are obtained using either the medium electrodes ( $R_{inj} = 54$  mm, figures 3a and 3c) or the external ones ( $R_{inj} = 93$  mm, figures 3b and 3d), for different intensities of  $I$  and  $B$ .

The turbulence generated by the instability of the mixing layer transports a fraction of the momentum from the fluid annulus to the inner fluid domain. The resulting entrainment

of the fluid in the inner domain is characterized by the decay of the maximum value of  $U_\theta$  compared to that predicted by the laminar theory and in the shift of its radial position towards the external wall.

It is observed that the wall layer remains stable and thin in a wide range of values of the key parameters  $I$  and  $B$ , independently of the injection radius  $R_{inj}$  (figure 3). The properties of the shear layer associated with the external set of electrodes could be different from those of a classical free shear layer, since it develops in the vicinity of the wall and may interact with the wall side layer. As a consequence, only data associated to the medium electrodes are presented.

In order to determine the thickness of the shear layer and its dependencies on  $I$  and  $B$ , mean angular velocity profiles (as those plotted in figure 4) are used. Let us define the thickness,  $\delta_{||}$ , of the shear layer as:

$$\delta_{||} = \frac{\Delta U_\theta}{(dU/dr)_{max}}, \quad (10)$$

where  $\Delta U_\theta = U_{\theta max} - U_{\theta min}$ ,  $U_{\theta min} = 0$  and  $U_{\theta max}$  is the mean velocity value at the intersection between the maximum slope dotted line and the mean velocity profile (solid line) predicted by the laminar theory (figure 4).

It is found that the non-dimensional layer thickness  $\delta_{||}/h$  depends on both  $Re$  and  $Ha$  according to the relation (figure 5)

$$\delta_{||}/h = C \left( \frac{Ha}{Re} \right)^{-1/2.3}. \quad (11)$$

The best fit suggested by our data for the constant is  $C \simeq 1$  (figure 5c). This dependence, which is quite different from that predicted by the laminar theory ( $\delta_{||L}/h = Ha^{-1/2}$ ) for which  $Re$  has no effect, expresses the effect of turbulence increasing the mixing region as  $Re$  increases.

An elementary model based on the quasi steady equilibrium between the energy transfer and the Hartmann dissipation in the range of wave numbers  $k_\rho < k < k_i$  may be written to find the evolution law of the integral scale with  $Ha$  and  $Re$  ( $k_\rho$  is the integral length scale wave number and  $k_i$  the injection wave number). In forced 2D turbulence, the injected energy flux  $\varepsilon_i$  is transferred from the injection scale  $l_i = 1/k_i$  towards the large scales of the flow ( $l_\rho = 1/k_\rho$ ) by an inverse energy cascade mechanism (Kraichnan, 1967, 1971b, Frich, 1995).

The energy equation within the Fourier space writes (Moreau, 1990).

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = -2\nu k^2 E(k, t) - \frac{2}{\tau_H} E(k, t) + T(k, t) + F(k, t), \quad (12)$$

where  $F$  is the forcing term. Neglecting the viscous term when  $k \leq k_i$ , This equation reduces in a stationary regime to

$$\frac{2}{\tau_H} E(k) = T(k) + F(k). \quad (13)$$

Now, integrating (13) from 0 to infinity ( $\int_0^\infty F(k) dk = \varepsilon_i$  and  $\int_0^\infty T(k) dk = 0$ ) yields to

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\tau_H} \int_0^\infty E(k) dk. \quad (14)$$

The quasi-steady equilibrium between the energy transfer and the Hartmann damping in a range of wave numbers  $k_\rho < k < k_i$  is expressed by the following relation

$$\frac{2}{\tau_H} E(k) = T(k). \quad (15)$$

The transfer function term  $T(k)$  may be built dimensionally as

$$T(k) \simeq E \frac{u}{l} \simeq E k (k E)^{1/2}. \quad (16)$$

Coupling (15) and (16), yield to the following expression for the energy spectrum

$$E(k) = C \tau_H^{-2} k^{-3}. \quad (17)$$

This relation is valid only for  $k_\rho < k < k_i$ , where the energy transfer between the wave numbers  $k$  is assumed to be local. The constant  $C$  of eq. (17) depends on both  $\varepsilon_i$  and  $k_i$  and is obtained using a dimensional argument. The energy flux  $\varepsilon(k)$ , which is not constant because of Hartmann damping, may be written dimensionally as

$$\varepsilon(k) = C_1 \tau_H^{-3} k^{-2}, \quad (18)$$

and the energy density as

$$E(k) = C_K \varepsilon(k)^{2/3} k^{-5/3}. \quad (19)$$

It follows that  $C = C_K C_1^{2/3} = C_K \varepsilon_i^{2/3} \tau_H^2 k_i^{4/3}$ , where  $C_K$  is the Kolmogorov constant. Now, assuming that  $\varepsilon_H$  corresponds to a non negligible fraction of  $\varepsilon_i$  one may write

$$\varepsilon_i \simeq \varepsilon_H = \frac{2}{\tau_H} \int_{k_\rho}^{k_i} E(k) dk. \quad (20)$$

Assuming also that  $k_i^2 \gg k_\rho^2$ , one finally obtain

$$k_\rho^2 \simeq C_K k_i^{4/3} \varepsilon_i^{-1/3} \tau_H^{-1} \simeq C_K (L k_i)^{4/3} \frac{1}{h^2} \left( \frac{Ha}{Re} \right). \quad (21)$$

$\tau_H^{-1}$  is replaced by  $\frac{\nu Ha}{h^2}$  and  $\varepsilon_i \sim \frac{1}{\tau_{tu}} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \simeq \frac{U^3}{L} = \frac{(\nu Re)^3}{L^4}$ .

This simple model, which results from the equilibrium between the inertial effect and the Hartmann damping, shows that the integral length scale of the flow varies as  $\left( \frac{Ha}{Re} \right)^{-1/2}$ . This theoretical prediction may give an explanation of the observed experimental evolution of the turbulent free shear layer thickness  $\delta_{\parallel} \sim \left( \frac{Ha}{Re} \right)^{-1/2.3}$ .

### 4.3 The global angular momentum

Another important quantity which may be used to test the theoretical models is the global angular momentum

$$L = \int_{r_{min}}^{r_{max}} r^2 U_\theta(r) dr, \quad (22)$$

which is quite significant since it represents the net effect of the driving torque. In the elementary case of a steady inertialess flow, the Sommeria-Moreau model (1982) yields the simple expression

$$L = \frac{I}{4\pi\sqrt{\rho\sigma\nu}} (r_{max}^2 - r_{min}^2). \quad (23)$$

It is the direct consequence of the balance between the driving torque and the antagonistic (ohmic and viscous) Hartmann torque ( $r_{min}$  and  $r_{max}$  are the boundaries of the area where data are available). Notice that, from this simple balance, the angular momentum has the property to vary linearly with the  $I$  and to be  $B$ -independent.

In figure 6 are presented the evolution of  $L$  with  $I$  for different values of  $B$ . The solid line corresponds to the theoretical expression (23). For  $B \geq 2$  T ( $Ha \geq 900$ ), the variations of  $L$  agree with a linear expression similar to (23), but a slope slightly smaller (by 15%) than that predicted by (23). This departure, which can not be explained by measurement uncertainties, is associated with the extra dissipation originating from the electrically conducting fraction of the bottom wall. Indeed, the global conductivity ratio

of this fraction,  $C_w = \frac{\sigma_w t_w}{\sigma h} \cdot \frac{S_{cw}}{S}$  (where  $S_{cw}$  is the area of the conducting fraction), yields to a correction factor whose order of magnitude ( $\simeq 10\%$ ) may be seen as a good explanation of the departure between the experimental and theoretical slopes. It may be stressed that the linear dependence of  $L$  with  $I$  independently of  $B$  is a good confirmation of the two-dimensional character of the flow.

Now, for  $B < 2$  T, the evolutions of  $L$  with  $I$  exhibit a strong dependence on  $B$ . This departure from the laminar prediction may be interpreted as an effect of the Ekman pumping within the Hartmann layers, which is forcing a secondary three-dimensional flow quite sensitive to the Joule dissipation. This centrifugal secondary flow has recently been modeled (Poth  rat *et al.*, 2000) and a fairly good agreement with our experimental results is found. According to this model, the departure from the B-independent regime decreases as  $Ha^2$  when  $Ha$  increases.

## 5 Properties of the quasi-2D turbulence

### 5.1 Spectral analysis

A spectral analysis of the angular velocity fluctuations has been performed using Welch's averaged periodogram method. The spatial power spectral densities (PSD) are derived from the temporal velocity signals  $u_\theta(t)$  using the Taylor's hypothesis. The spatial velocity signals,  $u_\theta(x)$ , are obtained from  $u_\theta(t)$  using the instantaneous velocity instead of the mean velocity such that  $x = u_\theta(t) t$ . The PSD estimated in the ranges  $0.5 < B < 6$  T,  $10 < I < 60$  Amp and  $2.3 < r < 10.9$  cm, exhibit two important features: first the presence of peaks at low frequencies (of the order of 1 Hz), second the existence of a short range (less than one decade of  $k$ ) over which a power law  $k^{-n}$  seems to be well defined (figure 7). This range is short because it is squeezed between the peaks associated with the large wave scales ( $k_\ell \lesssim 0.1$  cm<sup>-1</sup>) and the wave number  $k_i$  which characterizes the forcing mechanism on small scales ( $k_i \simeq 1$  cm<sup>-1</sup>).

It is quite clear that the energy is transferred towards the large scales in this quasi-2D flow. Figure 7b illustrates two examples of compensated energy spectra as  $k^3 E(k)$ , where a close-to  $k^{-3}$  and a close-to  $k^{-5/3}$  ranges are distinguishable. The peaks observed at small wave numbers (low frequencies) are the signatures of large coherent structures (figure 7a).

The shape of the energy spectrum in the intermediate wave number range ( $k_\ell < k < k_i$ ) is determined by both the energy transfer mechanism between neighbouring  $k$  and the local damping mechanism acting within the Hartmann layers. The spectra exhibit a close-to



$k^{-5/3}$  range for low intensities of  $B$  and  $I$  (typically for  $B \leq 0.5$  T and  $I \leq 20$  Amp). In such conditions, the Hartmann damping is small enough to force the energy flux  $\varepsilon$  towards the large scales to be almost constant (Kraichnan 1967, 1971b, Frish, 1995, Lesieur 1997). For larger values of  $B$  and  $I$ , a close-to  $k^{-3}$  range is observed within the shear layer ( $4 \text{ cm} \lesssim r \lesssim 9 \text{ cm}$ ), where the turbulence is fully developed. In these conditions, the dissipation in the Hartmann layers is so significant at all relevant scales that  $\varepsilon$  cannot be constant. We, thus, believe the leading effect is the competition between the non linear transfer, associated with a local transfer time  $\tau_{tu} \sim 1/\sqrt{k^3 E(k)}$ , and the Hartmann damping associated with the  $k$ -independent time  $\tau_H$ . Indeed, the of equality  $\tau_{tu}$  and  $\tau_H$  yields to such  $k^{-3}$  law and more precisely, suggests the relation

$$E(k) = C \frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{\nu}{h^2 k^3} = C Ha^2 \frac{\nu^2}{h^4 k^3}, \quad (24)$$

where the constant  $C$  should be universal. Our numerous data suggest a value close to  $1.25 \cdot 10^{-2}$ .

One should add a remark on the finite size of the probes, namely the distance  $d$  between two neighboring platinum wires, which should be taken into account in the PSD calculations. Indeed, the measured velocity fluctuations is the product of the true velocity fluctuations by a correction factor  $C_f = \frac{\sin(k d/2)}{k d/2}$  (see for instance Citriniti *et al.* 1997). This correction is only significant in the noise wave-number range ( $k \gtrsim 0.8 \text{ cm}^{-1}$ ).

## 5.2 Energy transfer within the Fourier space

Many experiments and numerical simulations were performed to study the inverse cascade of energy in 2D turbulent flows (see for instance Sommeria, 1986, Paret & Tabeling, 1997 for experiments and Zikanov & Thess, 1998, Crocco & Orlandi, 1985 for numerical simulations).

Equation (15) shows that the kinetic energy of the core flow is controlled by the term  $T(k)$ . this term corresponds to the global energy transfer to any wave number  $k$  by its neighbours, and it comes from the non-linear interactions of the Navier-Stokes equation.

For 2D isotropic turbulence,  $T(k)$  could be evaluated using triple-velocity correlations at two points as (see for instance Nguyen Duc, 1988):

$$T(k, t) = \pi k T(\mathbf{k}, t) = \frac{k^2}{4} \int_0^\infty K(r) r [kr J_0(kr) - 2J_1(kr)] dr, \quad (25)$$

where

$$K(r_1) = \langle u_1(x_1, 0, t) u_1(x_1, 0, t) u_1(x_1 + r_1, 0, t) \rangle \quad (26)$$

is a velocity triple-correlation function at two points separated by a distance  $r_1$ , and where  $J_0$  and  $J_1$  are Bessel functions.

Figure 8 shows a typical transfer function  $T(k)$  and the corresponding wave-number spectrum for  $B = 0.5$  T and  $I = 10$  Amp. This example illustrates the presence of an inverse energy transfer (as previously obtained by Sommeria, 1986, Nguyen Duc and Sommeria, 1988) from large to the small wave numbers in the inertial range. The energy is withdrawn where  $T(k) < 0$  (close to  $k_i$ , corresponding to the instability of the free shear layer) and supplied to modes  $k$  such that  $T(k) > 0$ . The negative part of  $T(k)$  at low wave numbers ( $1/l \geq 0.1\text{cm}^{-1}$ , out of the inertial range) might be thought as a direct redistribution of the energy from the large to the smallest scales. However, the vorticity maps which have been rebuilt (see example in figure 13) show clearly that the maximum size of the large eddies does not exceed the half of the box radius. This seems to exclude the presence of a condensation phenomenon (Paret and Tabeling, 1997), and therefore a direct energy cascade at large scales. The fact that the maximum distance  $r_1$  over which the triple-velocity correlations were performed is less than 9 cm, suggests that the negative part of  $T(k)$  observed at low wave-numbers has no real significance and could be the consequence of the non-local energy transfer between different modes.

### 5.3 Properties of the large scale structures

The study of the properties of the large-scale structures in such flows is of a prime interest. In fact, all the transfer phenomena take place in the regions where the shear develops and the large-scale eddies, fed by an inverse energy transfer, dominate the flow dynamics. Alboussière *et al.* (1999), showed experimentally (*via* direct visualizations of the free surface deformations), that the initial instability of the mixing layer is made of about 30 periodic eddies (typical length scale  $\sim 2$  cm), which merge rapidly to form a smaller number of large eddies (2 or 3 with a length scale  $\sim 10$  cm). We study, in this section, the influence of the two main parameters,  $I$  and  $B$ , both on the evolution of the eddies convective velocity and their average number over one turn.

A set of 30 equally-spaced probes are inserted in the bottom plate, along an arc of a circle of radius  $R_1 = 6.85$  cm (figure 1b) in order to measure the spatio-temporal correlations of the velocity signals. We expect that the trajectory of the large vortices centers is close to this set of probes. In fact, the velocity signals displayed in figure 9 (which are numerically filtered to focus only on the large scales), clearly show that the amplitude of the angular component is much smaller than the radial one. Moreover, it is noticeable

that the spatial correlations built with the radial velocity component, are more significant than those built with the azimuthal velocity component.

The transit time  $m_j \Delta t$  needed by a large structure to travel from the angular position  $\theta_1$  to  $\theta_j$  corresponds to the integer  $m_j$  which maximizes the integral (as illustrated in figure 10)

$$\text{Int}(m_j) = \int_{t_0}^{t_1} u_r(\theta_1, t) \cdot u_r(\theta_j, t + m_j \Delta t) dt \quad (27)$$

where the radial temporal velocity signals  $u_r(\theta_1, t = t_0 \rightarrow t_1)$  and  $u_r(\theta_j, t = t_0 + m \Delta t \rightarrow t_1 + m \Delta t)$  are recorded simultaneously at positions  $\theta_1$  and  $\theta_j$  respectively ( $j = 1, 30$  corresponds to the probes locations) during a time  $t_1 + m \Delta t - t_0$  ( $\Delta t$  is a time-step fixed by the data sampling frequency).

A maximum of 30 integrals  $\text{Int}(m_j)$  could be computed, and for each one of them, a transit angular velocity  $\Omega_j$  is determined by the relation

$$\Omega_j = \frac{\theta_j - \theta_1}{m_j \Delta t}. \quad (28)$$

By averaging these angular velocities  $\Omega_j$  one may obtain an estimation of the angular transit velocity  $\Omega_S = \frac{1}{j} \sum_{j=1}^j \Omega_j$  of the large scale structures.

The evolution of  $\Omega_S$  with  $B$  and  $I$  is shown in figure 11. The influence of  $B$  remains almost negligible, except for small values of  $B$  and large values of  $I$ . This is quite consistent with the general idea about the role of the magnetic field essentially acting to establish the two dimensionality. On the contrary a strong influence of the electric current  $I$  is observed so that  $\Omega_S$  is proportional to  $I$  and therefore to the flow mean velocity  $U_\theta$ . Figure 10 also shows that for  $\theta_j - \theta_1 \lesssim 0.65$  rad ( $\simeq \pi/5$ ), the cross-correlations functions are about 90% of the auto-correlations independently of  $I$  and  $B$ . This suggests that the large eddies life-time corresponds at least to their transit time over one turn.

Figure 12 shows an example of linear frequency velocity spectra estimated at different radial locations ( $42.5 \leq r \leq 89.5$  mm) for  $B = 5$  T and  $I = 20$  Amp. The spectra are normalized to the maximum value of PSD in the same distribution. Assuming the coherent structures frozen in the flow, it is possible to build a scenario which gives an estimation of the number of the large eddies.

Let us focus on the peaks whose amplitude is close to unity. Notice that the frequency of these peaks is approximately 2 Hz, except in the range  $56.5 \lesssim r \lesssim 62.5$  mm, where it is close to 4 Hz. We may think that the probes located in this area capture four structures passing during one turn, whereas two eddies are detected by the others. In agreement with

this observation, one could imagine the presence in the basic flow of two pairs of small and large eddies. In most cases, the picture is not as simple and the estimation of the number of the coherent structures can not possibly be obtained from a spectral analysis of the turbulent flow. So, in order to examine the evolution of the large structures number, we rebuilt by successive rotations of the velocity curves measured on the line probes (angular position  $\theta_0$ ) at times  $t_0 + n \Delta t$  ( $n$  is the number of rotations), the whole velocity field in the box. At each time  $t_0 + n \Delta t$ , the corresponding velocity profile is plotted at the angular position  $\theta_0$ , whereas the profile recorded at the time  $t_0$  is plotted at the angular position  $\Omega_S n \Delta t + \theta_0$ . Finally, to make the counting of the large eddies easier, the vorticity field is computed by taking the cylindrical curl of the velocity field and then plotted on a straight plane (figure 13).

The reconstructed vorticity field for the same experimental conditions as for figure 12 confirms that the number of the large eddies is 4. Similar computations for different values of  $B$  and  $I$ , allow to determine the variations of the number of these large eddies  $N_S$  (figure 14a). This points out again the leading role of  $I$  while  $B$  has a weak effect on  $N_S$ . Comparison between figure 14a and figure 14b shows the existence of a reasonable correlation between  $N_S$  and the ratio  $\tau_{tu}/\tau_H$ . Figure 14c presents the evolution of  $N_S \times \left(\frac{Re}{Ha}\right)^{0.4}$  versus  $\left(\frac{Re}{Ha}\right)$  suggesting that  $N_S \simeq 80 \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{1/2.5}$ . As expected, the number of the large coherent structures driven by the flow, when the turbulence is fully developed, seems to result from a competition between the inertial effects and the damping effect in the Hartmann layers.

## 6 Concluding remarks

A forced quasi-2D non homogeneous turbulence in an electrically conducting fluid subject to a uniform magnetic field is investigated. A detailed quantitative analysis of such statistically steady MHD turbulent shear flow at low  $R_m$  is provided. The mixing zone between the moving external annulus and the inner domain is the region of highest, where the turbulence develops and controls the transport of any quantity. It is found that the free shear layer thickness  $\delta_{||}$  is increased by about two order of magnitudes by turbulence resulting in an enhancement of momentum transport across the layer. Its non-dimensional value  $\delta_{||}/h$  depends on both  $Ha$  and  $Re$  as  $(Ha/Re)^{-1/2.3}$ , instead of  $Ha^{-1/2}$  predicted by the laminar theory.

The angular momentum  $L$  is found to be in good agreement with the prediction of the

two-dimensional model when the magnetic field is large enough to suppress any departure from two-dimensionality. It is  $B$ -independent and it varies linearly with the electric current  $I$ . The moderate disagreement between the experimental and the theoretical laws  $L(I)$ , is a result of the effect of the extra-dissipation due to the small fraction of the bottom wall which is electrically conducting.

The velocity field is dominated by a small number of large coherent structures fed by the inverse energy transfer characteristic of quasi-2D forced turbulent flows. Their number seems to be proportional to the ratio  $Ha/Re$  and their transit velocity is slightly above  $U_{\theta max}/2$ . For wave numbers ranging the large structures wave number  $k_\ell$  and the forcing wave number  $k_i$ , an inertial range exhibits a power law  $k^{-n}$  where  $n$  may be close to either  $5/3$  or  $3$ . Our interpretation of this inertial law is based on the importance of the Hartmann dissipation (time scale  $\tau_H$ ) in comparison with the eddy turn-over time (time scale  $\tau_{tu}$ ). When this dissipation is negligible, a close-to  $k^{-5/3}$  power law is observed as conjectured by Kraichnan. But when it is significant, the quasi steady equilibrium at any wave number  $k$  implies the equality of  $\tau_{tu}$  and  $\tau_H$  and leads to the  $k^{-3}$  law. This explain the proportionality between  $C$  in the law  $E = Ck^{-3}$  and the non-dimensional parameter  $Ha/Re (l_\perp/h)^2$ .

### Acknowledgments

These experiments under high magnetic field were performed in one of the magnet sources (M5) of the Grenoble High Magnetic Field Laboratory.

We are very grateful to V. Uspenski from Moscow University, for his effective contribution during the first experiments.

R. Bolcato is gratefully acknowledged for his technical assistance. We also would like to thank A. Pothérat, J. Sommeria and T. Alboussière for fruitful discussions. This work was supported first by the European Community under contract n° ERB-CIPA-CT 93-0080 and then by the French atomic energy commission (CEA, centre d'études de Cadarache) under contract n° 5010 6 7B036910.

### References

MOREAU, R. 1990 *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

- HUNT, J. C. R. & LUDFORD, G. S. S. 1968 Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields Part 1. Obstacles in a constant area channel. *J. Fluid Mech.* **33**, 693-714.
- MÜCK, B. GÜNTHER, C. MÜLLER, U. & BÜHLER, L. 2000 Three-dimensional MHD flows in rectangular ducts with internal obstacles. To appear in the *J. Fluid Mech.*
- ALBOUSSIERE, T. NEUBRAND, A. C. GARANDET, J. P. & MOREAU, R. 1997 Segregation during horizontal Bridgman growth under an axial magnetic field. *J. Cryst. Growth* **181**, 133-144.
- DAVOUST, L. COWLEY, M. D. MOREAU, R. & BOLCATO, R. 1999 Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field. *J. Fluid Mech.* **400**, 59-90.
- SOMMERIA, J. & MOREAU, R. 1982 Why, how and when MHD turbulence becomes two-dimensional? *J. Fluid Mech.* **118**, 507-518.
- LENHERT, B. 1955 Instability of laminar flow of mercury caused by an external magnetic field. *Proc. Royal Soc. London* **A233**, 299-
- KOLESNIKOV, Yu. & TSINOBER, A. B. 1972a An experimental study of two-dimensional turbulence behind a grid. *Fluid Dynamics* **9**, 621-624.
- ALEMANY, A. MOREAU, R. SULEM, P. & FRISH, U. 1979 Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence. *J. Méc.* **18**, 277-313.
- DAVIDSON, P. A. 1997 The role of angular momentum in the magnetic damping of turbulence. *J. Fluid Mech.* **336**, 123-150.
- DAVIDSON, P. A. 1995 Magnetic damping of jets and vortices. *J. Fluid Mech.* **299**, 153-186.
- SOMMERIA, J. 1986 Experimental study of two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.* **170**, 139-168.
- LIELAUSIS, O. A. 1975 Liquid metal magnetohydrodynamics. *Atomic energy review* **13**, 527-581.
- KLJUKIN, A. A. & KOLESNIKOV, Yu. B. 1989 MHD instabilities and turbulence in liquid metal shear flows. Proc. of the IUTAM Symposium 'Liquid Metal Magnetohydrodynamics', eds. J. Lielpeteris and R. Moreau, *Kluwer Acad. Press.* 449-454.

- POTHÉRAT, A. SOMMERIA, J. & MOREAU, R. 1999 An effective 2D model for MHD flows with transverse magnetic field. To appear in the *J. Fluid Mech.*
- ALBOUSSIÈRE, T. USPENSKI, V. & MOREAU, R. 1999 Quasi-2D turbulent shear layers. *Experimental Thermal and Fluid Science* **20**, 19-24.
- KRAICHNAN, R. H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* **10**, 1417-1423.
- KRAICHNAN, R. H. 1971b Inertial range transfer in two and three dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **47**, 525-535.
- FRICH, U. 1995 Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov. *Cambridge University Press*.
- LESIEUR, M. 1997 *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- CITRINITI, J. H. & GEORGE, W. K. 1997 The reduction of spatial aliasing by long hot-wire anemometer probes. *Experiments in Fluids* **23**, 217-224.
- PARET, J. & TABELING, P. 1997 Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4162-4165.
- ZIKANOV, O. & THESS, A. 1998 Direct numerical simulation of forced MHD turbulence at low magnetic Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **358**, 299-333.
- CROCCO, L. & ORLANDI, P. 1985 A transformation for the energy-transfer term in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **16**, 405-424.
- NGUYEN DUC, J. M. 1988 *Instabilité et turbulence dans des écoulements bidimensionnels MHD*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- NGUYEN DUC, J. M. & SOMMERIA, J. 1988 Experimental characterization of steady two-dimensional vortex couples. *J. Fluid Mech.* **192**, 175-192.
- PARET, J. & TABELING, P. 1998 Intermittency in the 2D inverse cascade of energy: experimental observations. *Phys. Fluids* **10**, 3126-3136.

## Figures

Figure 1. (a) Sketch of the experimental set-up. 1. || free shear layer, 2. || wall shear layer, 3. Hartmann layers, 4. ring of electrodes. (b) Upper view of the bottom plate showing the two electrode-rings and the potential probes.

Figure 2. Typical angular velocity signals in the unsteady regime measured at three radial positions.  $I$  jumps from 0 to 3 Amp at  $t \approx 58.6$  s and  $B = 4$  T.

Figure 3. Radial profiles of the angular mean velocity. (a)  $B = 5$  T and  $R_{inj} = 54$  mm, (b)  $B = 5$  T and  $R_{inj} = 93$  mm. (c),  $I = 40$  Amp and  $R_{inj} = 54$  mm. (d),  $I = 40$  Amp and  $R_{inj} = 93$  mm.

Figure 4. Angular mean velocity profiles plotted for  $B = 3$  T and for  $I = 10, 20, 30$  and 40 Amp. The solid lines correspond to the angular mean velocity evolutions predicted by the laminar theory and the dotted lines to the maximum slopes  $(dU_\theta/dr)_{max}$  of the experimental profiles.

Figure 5. Log-Log plots of the evolution of the free turbulent shear layer thickness  $\delta_\parallel$ . (a) evolution of  $\delta_\parallel Ha^{1/3}$  with  $Ha$ . (b) evolution of  $\delta_\parallel I^{-1/3}$  with  $I$ . Figures 5a and 5b suggest that  $\delta_\parallel/h \propto (\frac{Ha}{Re})^{-1/3}$ .

Figure 6. Evolution of the angular momentum  $L$  versus  $I$  and for several values of  $B$ . The solid line represents the angular momentum evolution predicted by the laminar theory. Notice that the linear dependence of  $L$  with  $I$  independently of  $B$  at high magnetic fields ( $B \geq 2$ ) is a good confirmation of the two-dimensional character of the flow.

Figure 7. (a) Lin-Lin frequency spectra of the velocity fluctuations measured within the free shear layer  $r \simeq 68.5$  mm. The low frequency peaks are the signature of the large coherent structures. (b) Two typical compensated spatial velocity spectra  $k^3 E(k)$  exhibiting in the inertial range a close to  $k^{-5/3}$  power law for  $Ha/Re = 6 \cdot 10^{-4}$  ( $B = 1$  T and  $I = 20$  Amp, weak Joule dissipation) and a close to  $k^{-3}$  power law for  $Ha/Re = 36 \cdot 10^{-4}$  ( $B = 3$  T and  $I = 10$  Amp, important Joule dissipation).

Figure 8. The evolution of the energy transfer term  $T(k)$  and its associated spatial spectrum  $E(k)$ . This example illustrates the presence of an inverse energy transfer from large to the small wave numbers in the inertial range. The energy is withdrawn where  $T(k) < 0$  and supplied to modes  $k$  such that  $T(k) > 0$ .

Figure 9. Radial and angular velocity signals recorded simultaneously at two different positions ( $\theta = 0$  and 0.654 rad).

Figure 10. Radial velocity cross-correlation functions.  $\text{Int}(m_j)$ . Notice that the cross-correlation is about 90% of the auto-correlation for  $\theta = \pi/5$  suggesting that



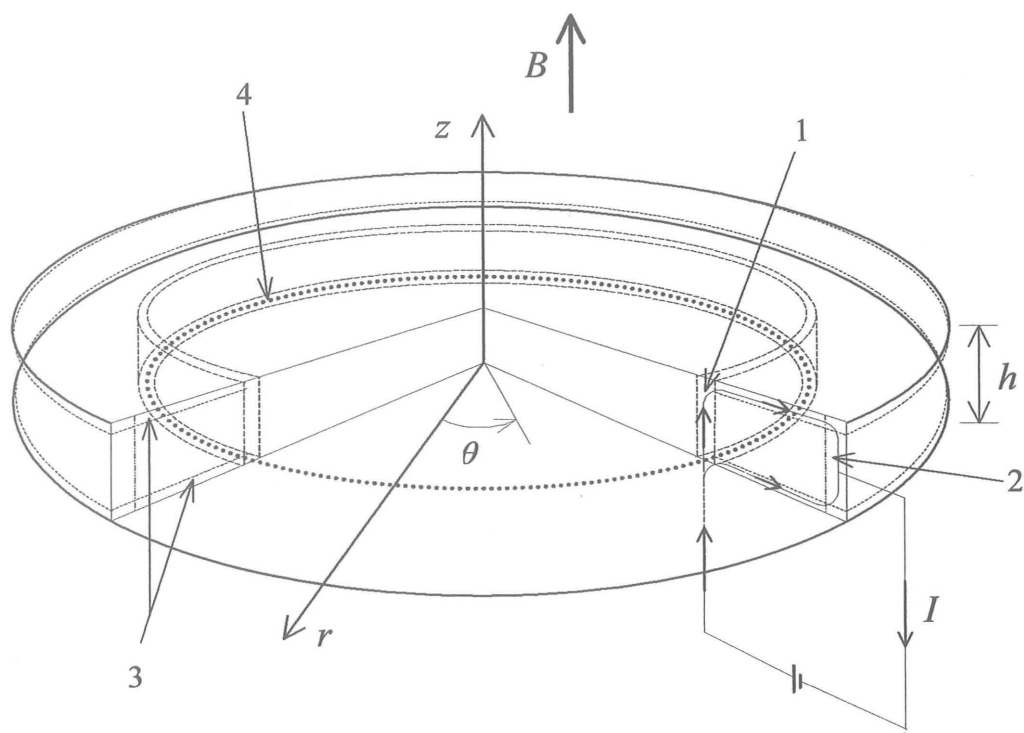
the large eddies life-time corresponds at least to their transit time over one turn.

Figure 11. Evolution of the coherent structures transit velocity  $V_S = \Omega_S \times R_1$  with  $B$  and  $I$ .

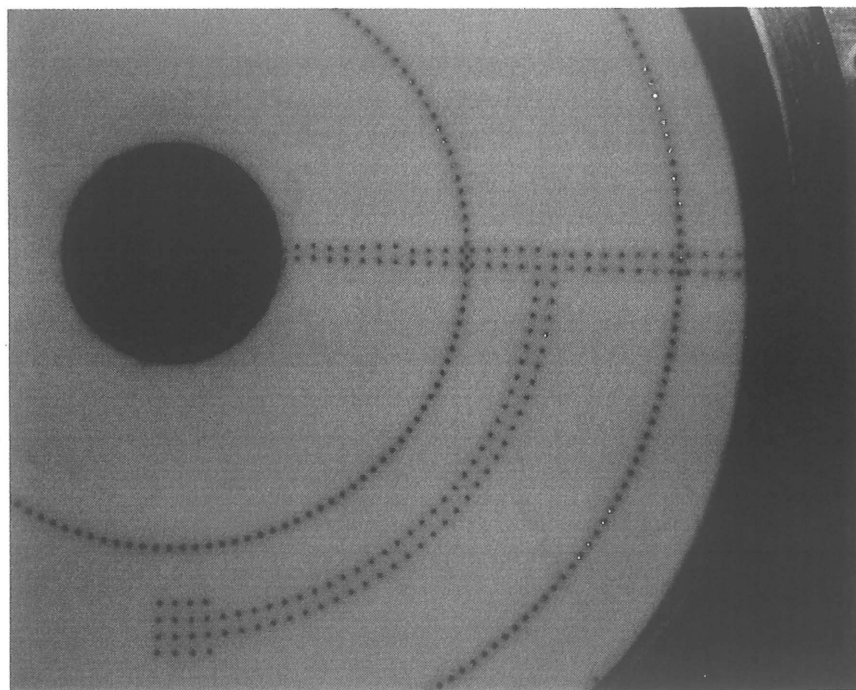
Figure 12. Linear frequency velocity spectra at different radial locations suggesting the presence of two pairs of large eddies.  $B = 5$  T and  $I = 20$  Amp.

Figure 13. Rebuilt vorticity field in the same conditions as in figure 12 ( $B = 5$  T and  $I = 20$  Amp) confirming the presence of 4 large eddies. For clarity, the vorticity field is plotted on a straight plane.

Figure 14. (a). Evolution of the number of coherent structures  $N_S$  with  $B$  and  $I$ . (b). Ratio of the turn-over time to the Hartmann damping time  $\tau_{tu}/\tau_H$  versus  $B$  and  $I$ . (c).  $N_S \times \left(\frac{Re}{Ha}\right)^{0.4}$  versus  $\left(\frac{Re}{Ha}\right)$  confirming that  $N_S$  is dictated by the balance between inertia and the Hartmann damping.  $N_S \simeq 80 \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{1/2.5}$ .



(a)



(b)

Figure 1. (a) Sketch of the experimental set-up: 1, free shear layer; 2, wall shear layer; 3, Hartmann layers; 4, electrodes-ring. (b) Upper view of the bottom plate showing the two electrode-rings and the potential probes.

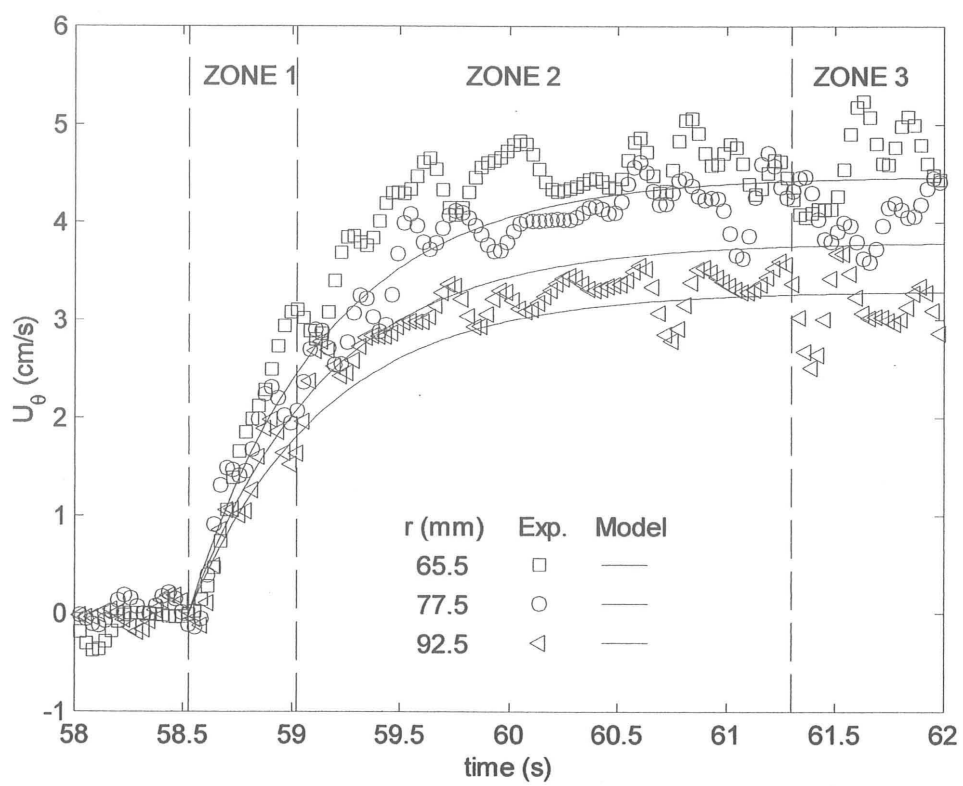


Figure 2. Typical angular velocity signals in the unsteady regime measured at three radial positions.  $I$  jumps from 0 to 3 Amp at  $t \simeq 58.6$  s and  $B = 4$  T.

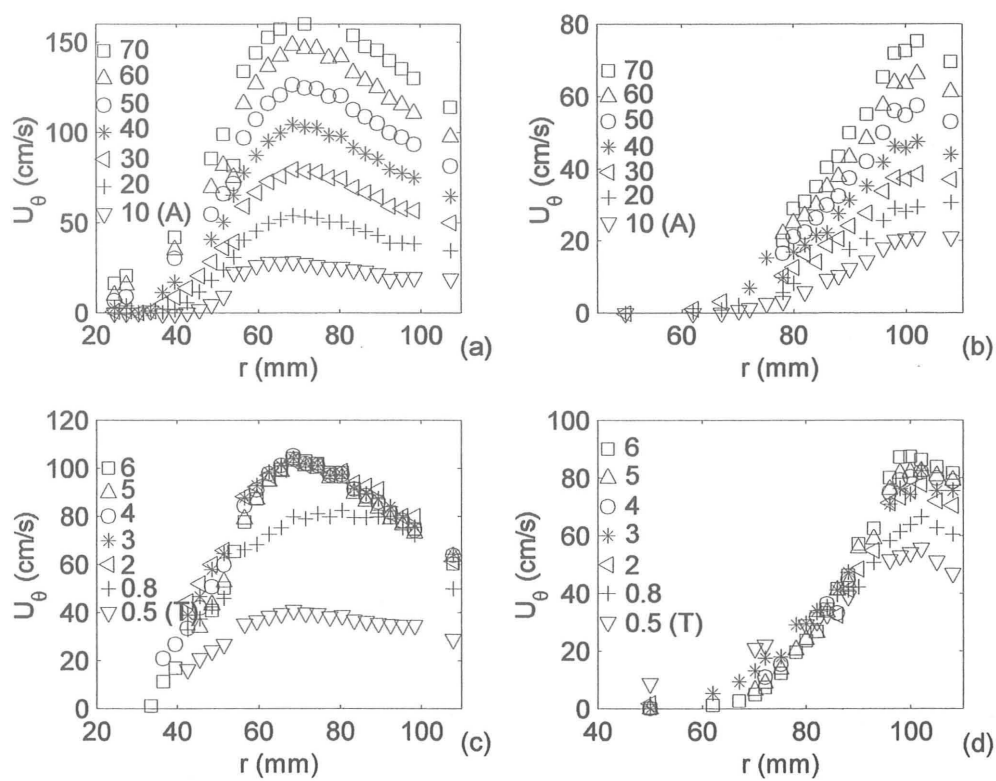


Figure 3. Radial profiles of the angular mean velocity. (a)  $B = 5$  T and  $R_{inj} = 54$  mm, (b)  $B = 5$  T and  $R_{inj} = 93$  mm. (c),  $I = 40$  Amp and  $R_{inj} = 54$  mm. (d),  $I = 40$  Amp and  $R_{inj} = 93$  mm.

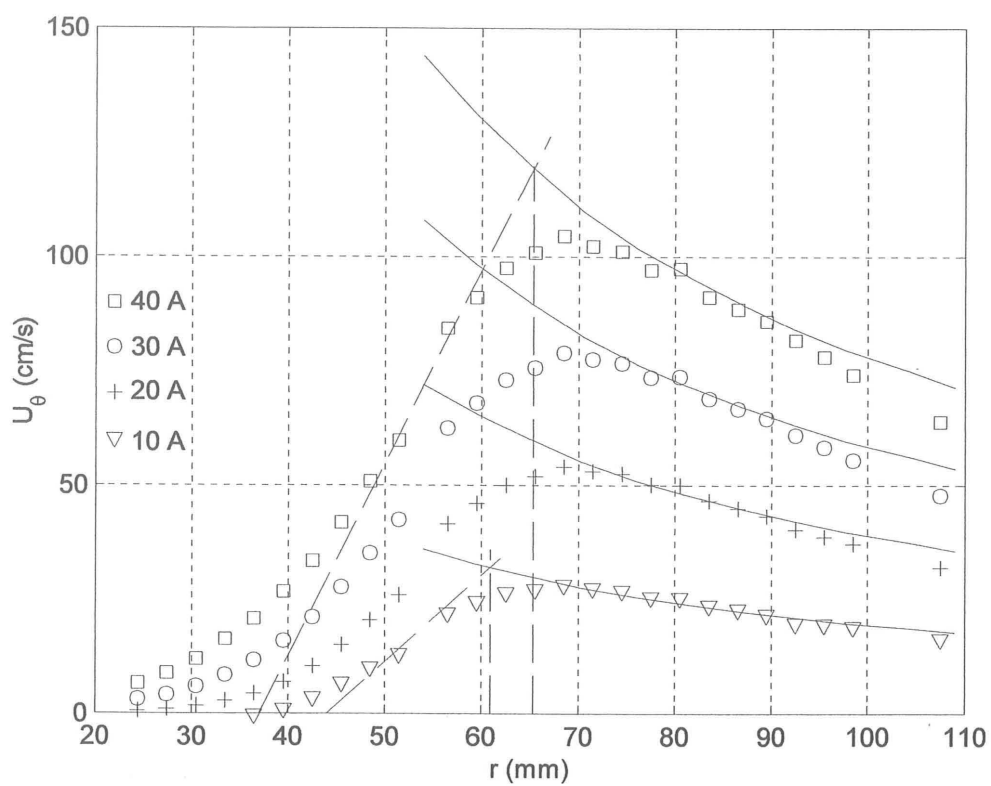


Figure 4. Angular mean velocity profiles plotted for  $B = 3$  T and for  $I = 10, 20, 30$  and  $40$  Amp. The solid lines correspond to the angular mean velocity evolutions predicted by the laminar theory and the dotted lines to the maximum slopes  $(dU_\theta/dr)_{max}$  of the experimental profiles.

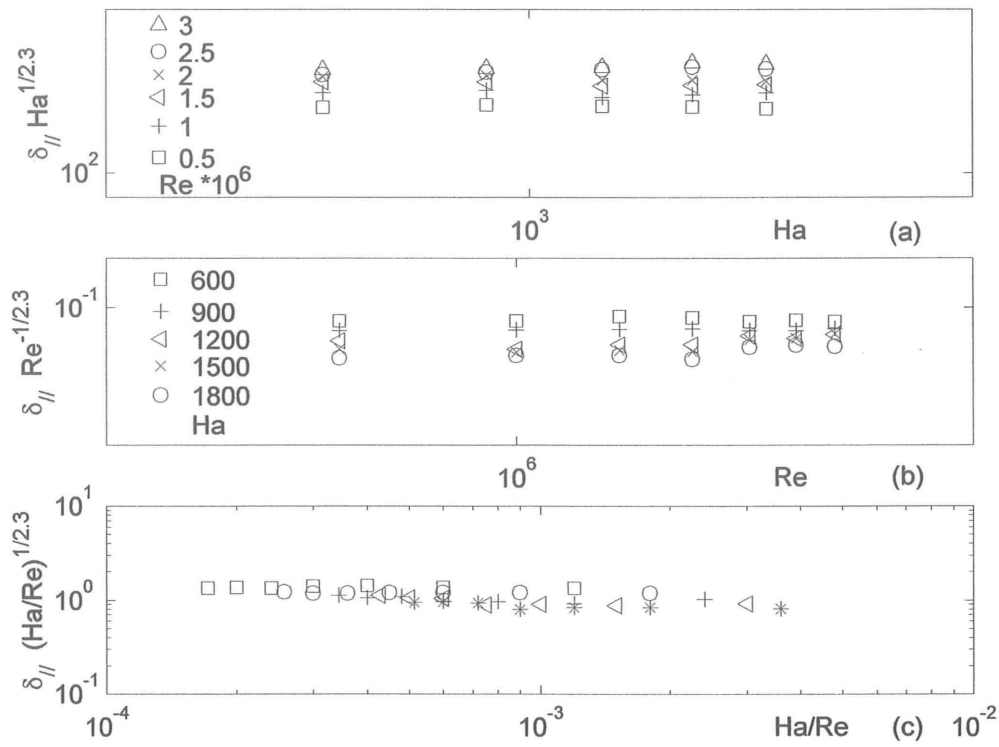


Figure 5. Log-Log plots of the evolution of the free turbulent shear layer thickness  $\delta_{\parallel}$ . (a) evolution of  $\delta_{\parallel} \times Ha^{1/2.3}$  with  $Ha$ . (b) evolution of  $\delta_{\parallel} \times Re^{-1/2.3}$  with  $Re$ . (c) evolution of  $\delta_{\parallel} \times \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{1/2.3}$  with  $Ha/Re$  suggesting that  $\delta_{\parallel}/h \simeq 1 \times \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{-1/2.3}$ .

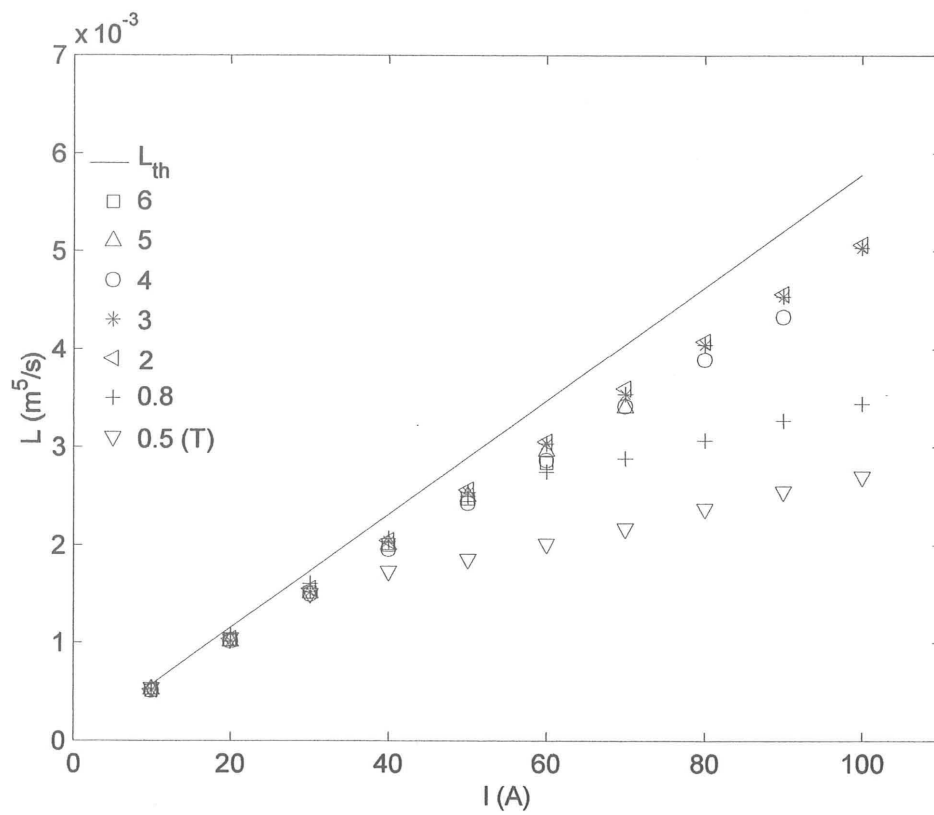


Figure 6. Evolution of the angular momentum  $L$  versus  $I$  and for several values of  $B$ . The solid line represents the angular momentum evolution predicted by the laminar theory. Notice that the linear dependence of  $L$  with  $I$  independently of  $B$  at high magnetic fields ( $B \geq 2$ ) is a good confirmation of the two-dimensional character of the flow.

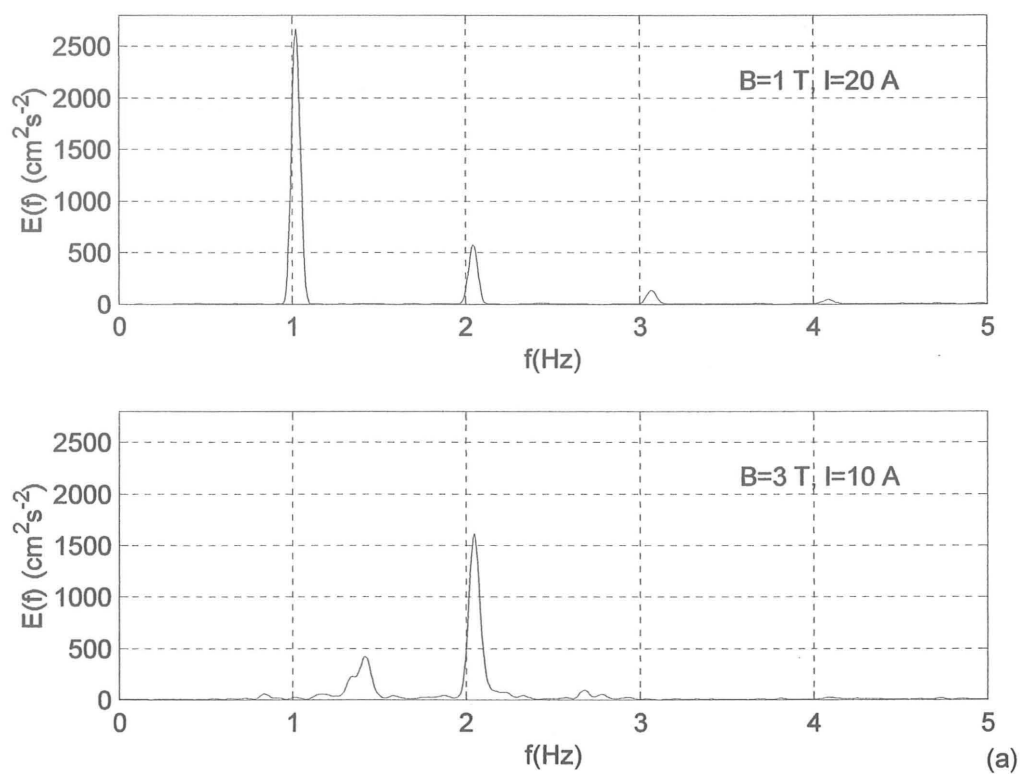


Figure 7a. Lin-Lin frequency spectra of the velocity fluctuations measured within the free shear layer  $r \simeq 68.5 \text{ mm}$ . The low frequency peaks are the signature of the large coherent structures.



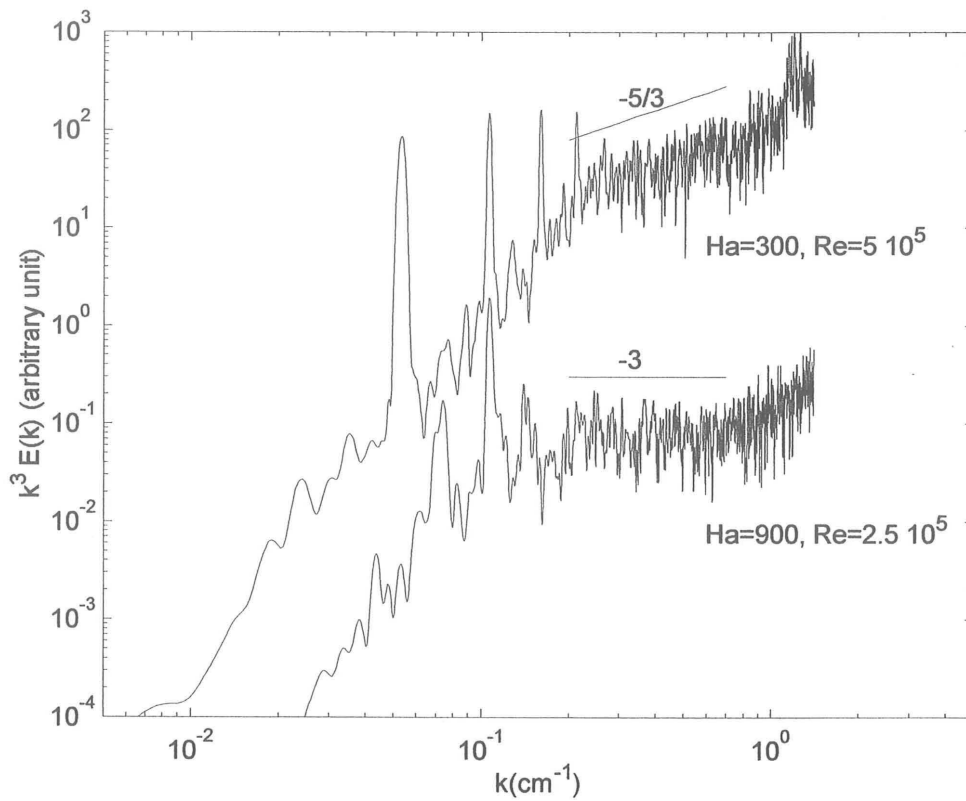


Figure 7b. Two typical compensated spatial velocity spectra  $k^3 E(k)$  exhibiting in the inertial range a close to  $k^{-5/3}$  power law for  $Ha/Re = 6 \cdot 10^{-4}$  ( $B = 1$  T and  $I = 20$  Amp, weak Joule dissipation) and a close to  $k^{-3}$  power law for  $Ha/Re = 36 \cdot 10^{-4}$  ( $B = 3$  T and  $I = 10$  Amp, important Joule dissipation).

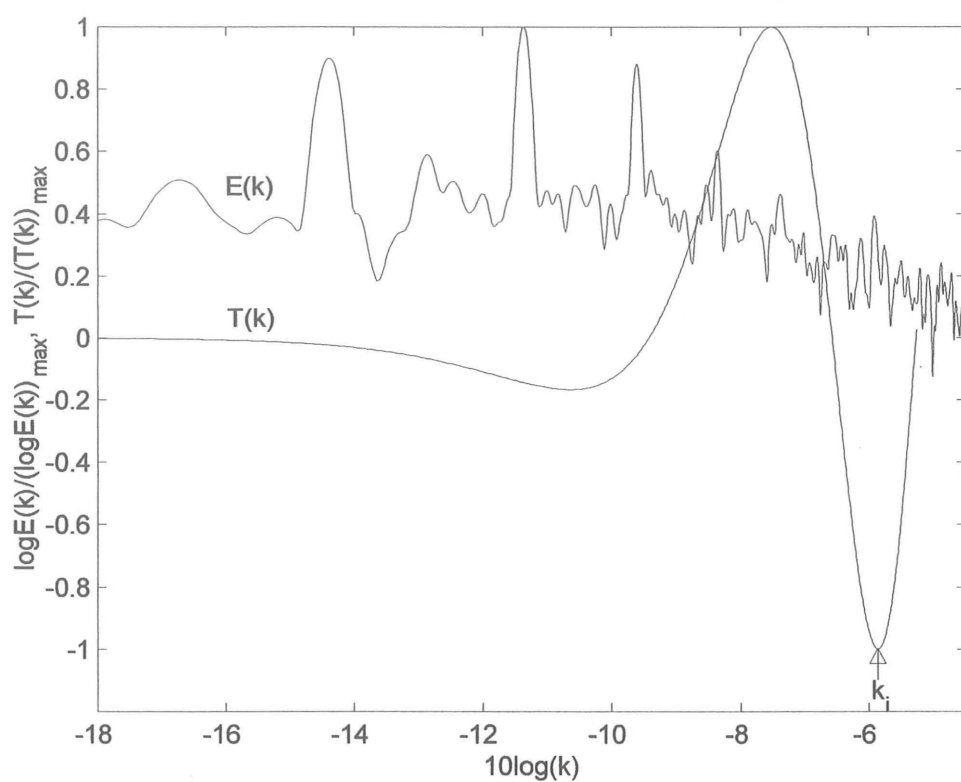


Figure 8. The evolution of the energy transfer term  $T(k)$  and its associated spatial spectrum  $E(k)$  ( $B = 0.5$  T and  $I = 10$  Amp). This example illustrates the presence of an inverse energy transfer from large to the small wave numbers in the inertial range. The energy is withdrawn where  $T(k) < 0$  and supplied to modes  $k$  such that  $T(k) > 0$ .

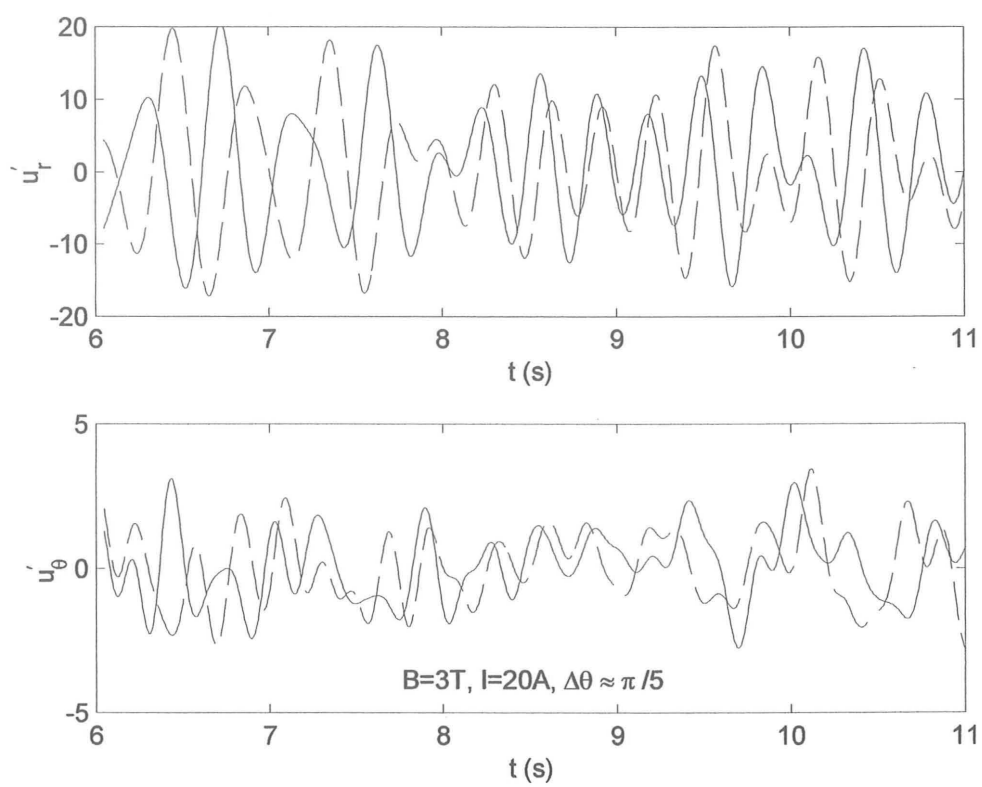


Figure 9. Radial and angular velocity signals recorded simultaneously at two different positions ( $\theta = 0$  and  $0.654$  rad)

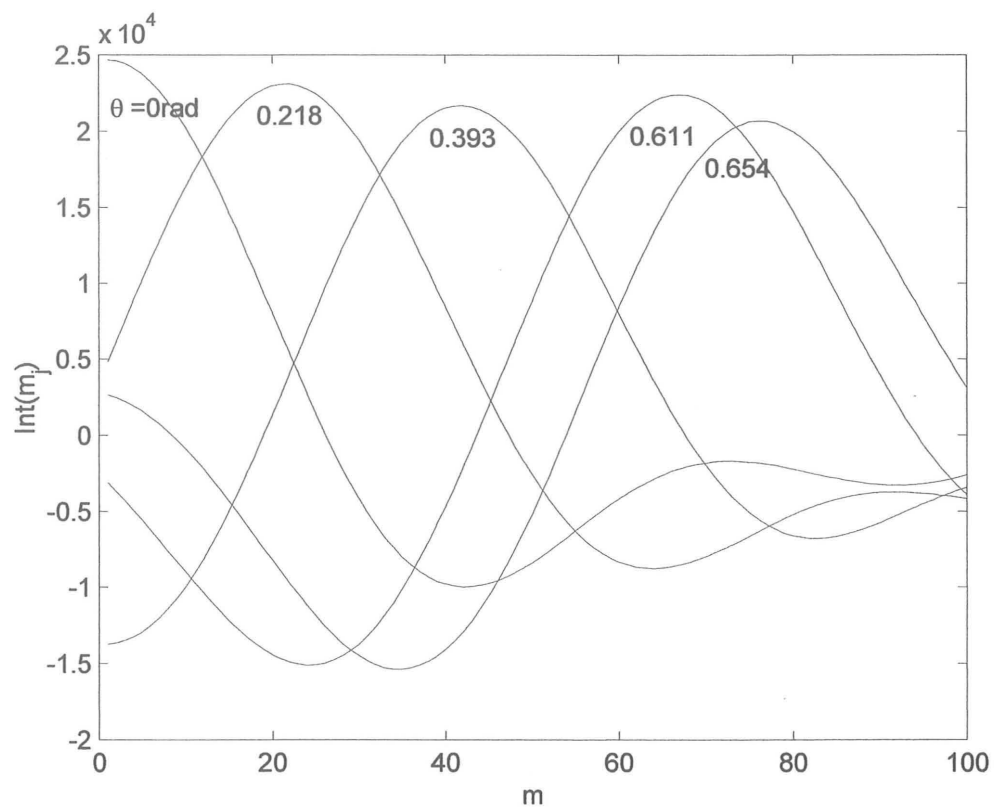


Figure 10. Radial velocity cross-correlation functions.  $\text{Int}(m_j)$ . Notice that the cross-correlation is about 90% of the auto-correlation for  $\theta = \pi/5$  suggesting that the large eddies life-time corresponds at least to their transit time over one turn.

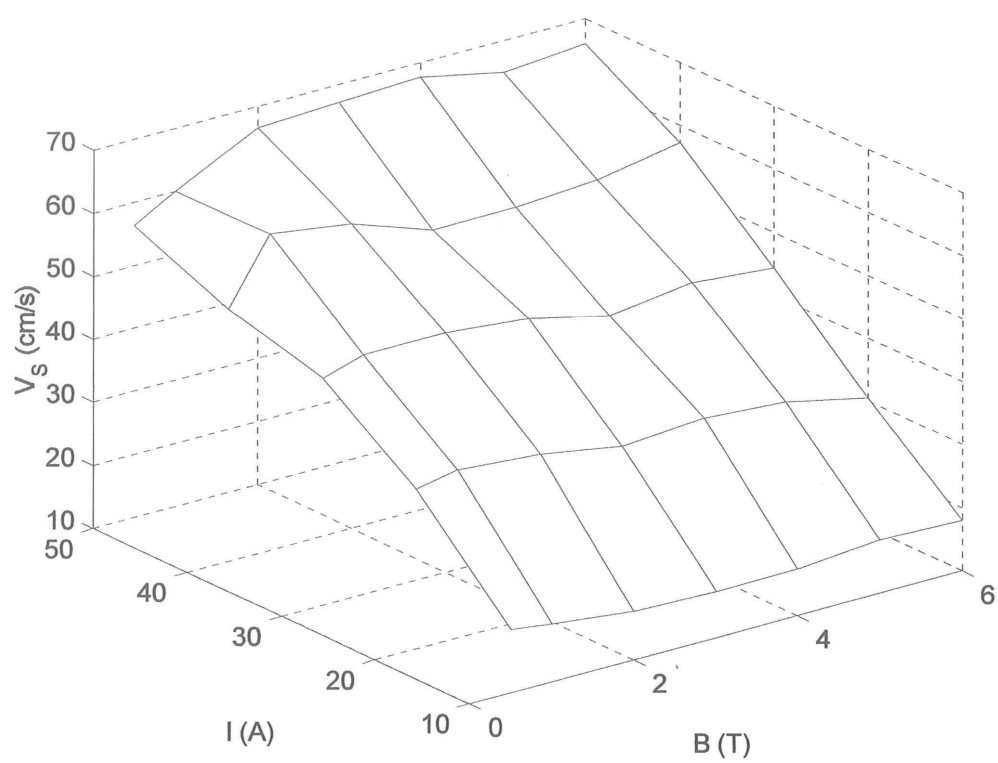


Figure 11. Evolution of the coherent structures transit velocity  $V_S = \Omega_S \times R_1$  with  $B$  and  $I$ .

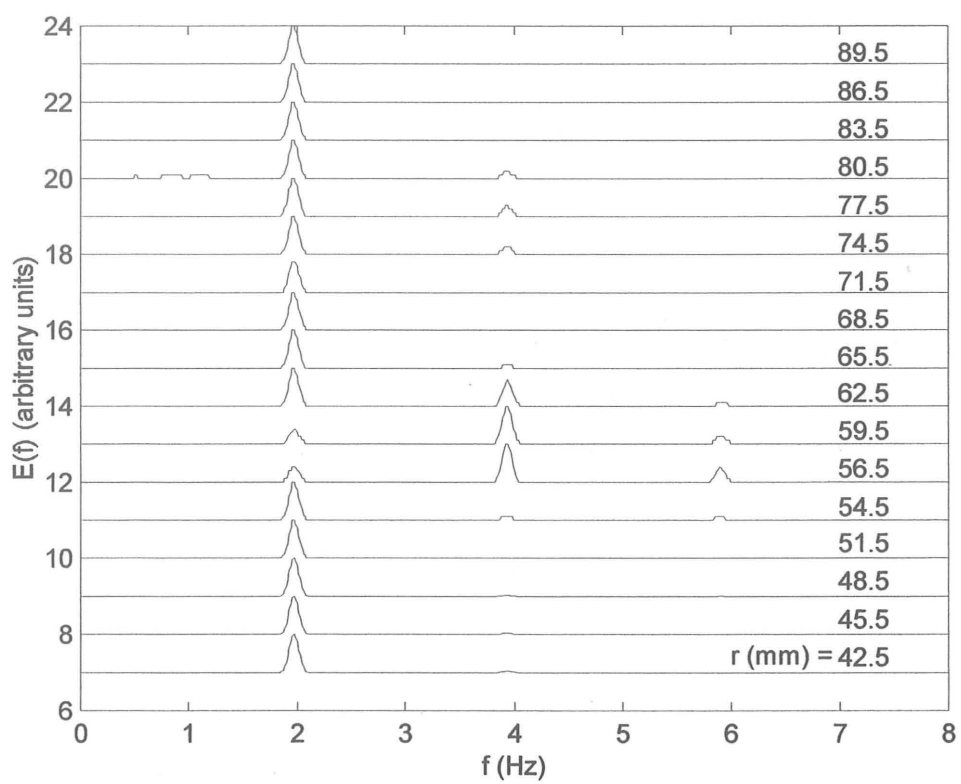


Figure 12. Linear frequency velocity spectra at different radial locations suggesting the presence of two pairs of large eddies.  $B = 5$  T and  $I = 20$  Amp.

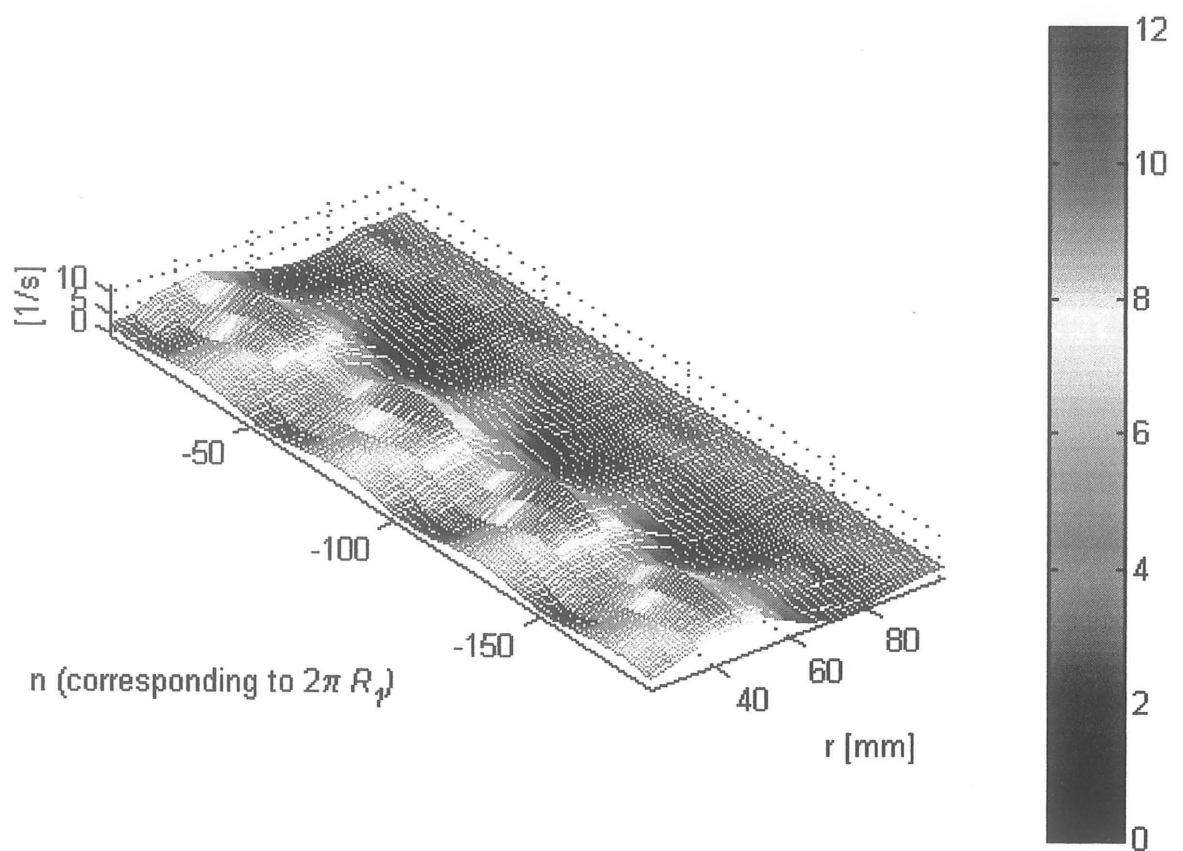


Figure 13. Rebuilt vorticity field in the same conditions as in figure 12 ( $B = 5$  T and  $I = 20$  Amp) confirming the presence of 4 large eddies. For clarity, the vorticity field is plotted on a straight plane.

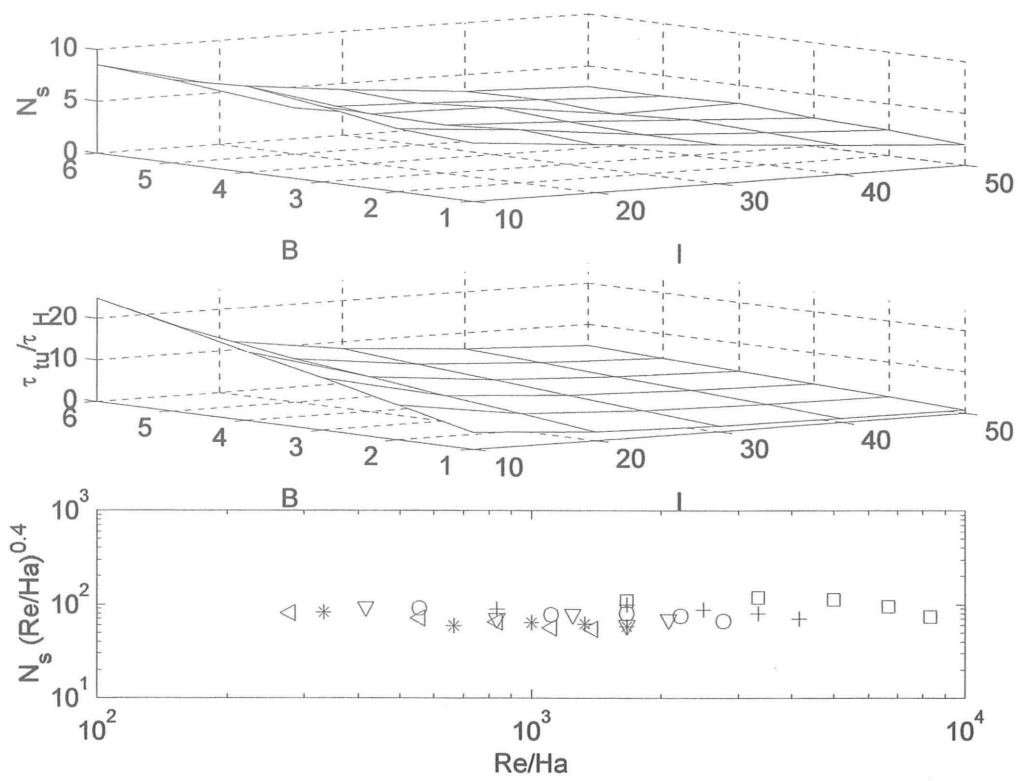


Figure 14. (a). Evolution of the number of coherent structures  $N_S$  with  $B$  and  $I$ . (b). Ratio of the turn-over time to the Hartmann damping time  $\tau_{tu}/\tau_H$  versus  $B$  and  $I$ . (c).  $N_S \times \left(\frac{Re}{Ha}\right)^{0.4}$  versus  $\left(\frac{Re}{Ha}\right)$  confirming that  $N_S$  is dictated by the balance between inertia and the Hartmann damping.  $N_S \simeq 80 \left(\frac{Ha}{Re}\right)^{1/2.5}$ .





**Résumé** Un écoulement cisailé MHD quasi-bidimensionnel est réalisé dans une couche mince circulaire de mercure soumise à un champ magnétique vertical uniforme  $B$ . Le fluide est mis en mouvement grâce à un courant électrique radial  $I$  qu'on injecte à mi-rayon de la cellule via des électrodes ponctuelles. Une couche cisailée extrêmement instable se développe alors entre la zone annulaire de fluide où le courant est injecté et la zone centrale, entraînée par la première.

Les propriétés du champ moyen de vitesse ainsi que les propriétés de la turbulence générée par l'instabilité de cette couche cisailée sont étudiées sur une large gamme de paramètres  $I$  et  $B$  ( $B$  allant jusqu'à 6 Tesla).

L'analyse spectrale montre que l'écoulement est dominé par des structures cohérentes évoluant de manière quasi-périodique à faible fréquence, alimentées en énergie par des structures plus petites *via* un mécanisme de transfert inverse d'énergie. On observe que les spectres d'énergie cinétique présentent, sur moins d'une décade de nombres d'onde, une zone autosimilaire en  $k^{-5/3}$  ou  $k^{-3}$  selon que la dissipation dans les couches de Hartmann est négligeable ou est du même ordre que les effets inertiels. On montre alors que l'écoulement est gouverné par un seul paramètre, le rapport  $Ha/Re$  ( $Ha$  et  $Re$  sont respectivement les nombres de Hartmann et de Reynolds) et on définit deux ensembles de valeurs de ce paramètre pour lesquels la dynamique de l'écoulement peut être ou non, considérée comme celle d'un écoulement 2D non-MHD.

### An experiment on a quasi-2D MHD turbulence

**Abstract** A quasi-2D non homogeneous turbulence in an electrically conducting fluid subject to a uniform magnetic field is investigated. An axisymmetric shear of a mercury layer is forced under the action of a steady vertical magnetic field  $B$  and a radial horizontal electric current  $I$ . The properties of the turbulence generated by the instability of this shear layer are studied for a wide range of  $I$  and  $B$  ( $B$  up to 6 Tesla).

The global angular momentum, derived from the mean velocity field, is found to be in good agreement with the prediction of the two-dimensional model of Sommeria-Moreau (1982), when the magnetic field is large enough to suppress any departure from two-dimensionality.

The velocity field is dominated by a small number of large coherent structures fed by an inverse energy transfer, characteristic of quasi-2D forced turbulent flows. For wave numbers ranging the large structures wave number and the forcing wave number, the energy spectra exhibit a close-to  $k^{-5/3}$  power law when the Hartmann damping is weak and a close-to  $k^{-3}$  when it is significant (of the same order of the inertial effects). The core flow is governed by one non dimensional parameter, the ratio  $Ha/Re$ , which expresses the quasi steady equilibrium between the Hartmann damping and the inertial effects.

**Mots clés** Turbulence bidimensionnelle, magnétohydrodynamique, couche cisailée, transfert inverse d'énergie, structures cohérentes, mesures de potentiel, sondes pariétales.